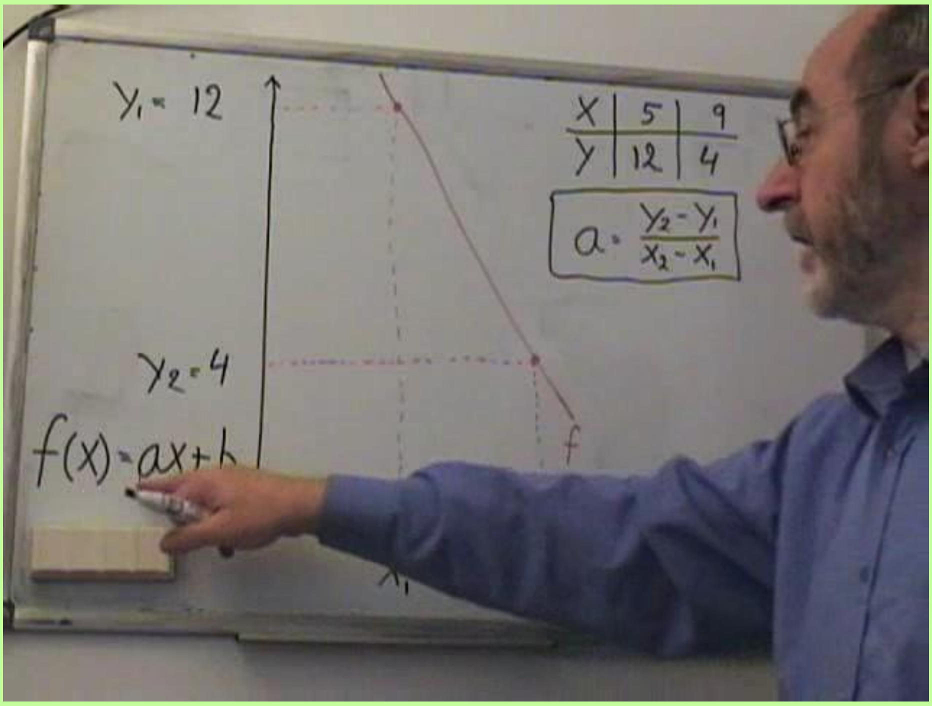
Peter L Sørensen:

Matematik C interaktivt for hf

(Grønt hæfte)

Version 10

DEL 1



Matematik C interaktivt for hf

(Grønt hæfte) DEL 1 Version 10

Forord

I denne version 10, Matematik C interaktivt for hf er lærerplanen fra 2017 indarbejdet. Der er 2 dele, dels dette hæfte med del 1 , som har grøn forside, og dels del 2, som har blå forside.

Den foregående version 9.3 kan tilgås via dette link: https://mahf.dk/del1/start9.3.pdf

Dette hæfte er beregnet til at blive brugt på en pc koblet på Internettet. Herved bliver det muligt at benytte diverse links til selvrettende E-opgaver og interaktive opgaver samt til videoer.
Alligevel kan det være praktisk at printe hæftet. Hvis din printer kan printe i brochureformat, vil det være bedst. I så fald bør benyttes en hæftemaskine, der kan hæfte på midten.

Videoerne bør ses i brudstykker på kun nogle få minutter af gangen.

Besvarelserne af de selvrettende E-opgaverne kan automatisk sendes via Internettet til læreren.

Uanset, hvor man er i hæftet, kan man komme til indholdsfortegnelsen ved at taste **Ctrl+Home, PageDown, PageDown, PageDown**.

Søgning på bestemte ord (svarende til stikordsregister) foretages ved at taste **Ctrl+f**

Denne undervisningspakke er under stadig udvikling.
Forslag og eventuelle rettelser til denne pakke modtages med tak ved et klik Her.

Dette hæfte, del 1, er på 60 sider. Del 2 er på 60 sider, i alt 120 sider.
E-opgaver, interaktive opgaver og videoer skønnes at svare til ca 120 sider.
Det samlede sidetal bliver således svarende til 240 sider.

/Peter L Sørensen

Lektion 1: Brøk

Udfør følgende 4 punkter

1) læs:

Motivation til brøk-regning og til ligninger

Opgave:
En taxa koster 25 kr i startgebyr og 12 kr pr km.
En køretur kom til at koste 115 kr
Hvor mange km blev kørt

Besvarelse:
(Måske forstår du ikke følgende besvarelse, men bliver så til gengæld motiveret til at lære om brøker og om ligninger, som vi senere skal i gang med.)

Lad x betegne antal km.
Der gælder

$12x + 25 = 115$

$12x = 115 - 25$

$12x = 90$

$x = {}^{90}/_{12}$

$x = {}^{15}/_{2}$

$x = 7\,{}^{1}/_{2}$

DVS: Der blev kørt 7,50 km

2) Se video. Link: Brøkregning

3) Løs interaktivt. Link: Opgaver i brøkregning Se regler

Hvis det kniber med de 4 regningsarter så klik her: Lær at regne, også med negative tal

4) Løs E-opgaver. Link: E-opgaver 01 Broek

Du afleverer elektronisk, når du klikker i *"Send til aflevering"* .

Lektion 2: Ligninger

Udfør følgende 4 punkter

1) Læs

Du står i regnskoven, og en oversvømmelse er på vej. Det er begyndt at regne vedvarende. Lige nu er der 9 cm vand, og vandstanden stiger $^2/_3$ cm hvert minut.

Du går nu i gang med at bygge en tømmerflåde; men du har travlt. Når vandstanden kommer op på 75 cm er det umuligt at arbejde, så du skal være færdig inden.

Du har nu x minutter til at bygge tømmerflåden.

Vi vil finde den ubekendte størrelse ***x***.

Der må gælde:

$$9 + {}^2/_3 \cdot x = 75$$

Det kalder vi en ligning.

At løse en ligning vil sige, at finde det eller de tal, der indsat i stedet for den ubekendte får lighedstegnet til at passe.
Vi laver nogle omskrivninger af ligningen til nogle mere enkle ligninger, der har samme løsning. Det kaldes lovlige omskrivninger.
Først laver vi en omskrivning, så vi undgår brøk.
Det gør vi ved at gøre både venstresiden og højresiden 3 gange så stor.

$$27 + 2x = 225$$

Bemærk ***2x*** er det samme som ***2·x***
og bemærk, **alle** led er ganget med ***3***.

Næste trin er at isolere ***2x***. Det gør vi ved at fjerne ***27*** på begge sider af lighedstegnet.

$$2x = 225 - 27$$

Man kan også sige, vi flytter ***27*** over på den anden side af lighedstegnet og skifter fortegn.

Vi kan nu udregne højresiden

$$2x = 198$$

Ved at dividere med 2 på begge sider af lighedstegnet er ***x*** isoleret og ligningen løst.

$$x = 99$$

Konklusion: **Du har 99 minutter til at bygge tømmerflåden.**

Når man løser en ligning ved lovlige omskrivninger, kan man sætte denne dobbeltpil ⇔ mellem ligningerne. Dobbeltpil mellem 2 ligninger betyder, de har samme løsning, fx:

$$9 + {}^2/_3 \cdot x = 75 \Leftrightarrow 27 + 2x = 225 \Leftrightarrow 2x = 225 - 27 \Leftrightarrow 2x = 98 \Leftrightarrow x = 99$$

Ofte undlader man dobbeltpil og går blot på ny linje ved hver omskrivning.

Her bringes en oversigt over lovlige omskrivninger ved løsning af ligninger.

Lovlige omskrivninger ved løsning af ligninger	
Regler:	**Eksempler på anvendelse af reglerne:**
Man kan flytte et led over på den anden side af lighedstegnene, hvis man samtidig ændrer fortegn.	$27 + 2x = 225$ $\Leftrightarrow \quad 2x = 225 - 27$
Almindelige udregninger	$2x = 225 - 27$ $\Leftrightarrow \quad 2x = 198$
Man må dividere eller gange med samme tal på begge sider, dog ikke med nul.	$9 + {}^{2}/_{3} \cdot x = 75$ $\Leftrightarrow \quad 27 + \; 2x \; = 225$ $2x = 198$ $\Leftrightarrow \quad x = 99$

Godt råd
Flyt ***x*** til den side, hvor der er flest og hold tallene på den anden side.
Bemærk ***-2*** er større end ***-5*** .

Eks. $7 - 5x = -2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 7 - 1 = -2x + 5x \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{2 = x}$

Pas på
Når man ganger eller dividerer på begge sider, skal det gøres ved samtlige led.
Led adskilles fra hinanden af plus eller minus. I udtrykket 5·3+7 er 2 led: ***5·3*** og ***7***.

Fx $\frac{1}{2}x + 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x = 6}$

Eksempler

Eks 1	Eks 2	Eks 3	Eks 4
$5 = 2x + 3$ $5-3 = 2x$ $2 = 2x$ $\mathbf{1 = x}$	${}^{2}/_{3}x + 5 = x - {}^{2}/_{5}$ $2x + 15 = 3x - {}^{6}/_{5}$ $10x + 75 = 15x - 6$ $75 + 6 = 15x - 10x$ $81 = 5x$ $\mathbf{16{,}2 = x}$	$2x + 3 = 2x$ $2x - 2x = -3$ $0 = -3$ Det er aldrig sandt og ligningen har ingen løsning	$1+2x+2 = 2x+3$ $2x - 2x = 3 - 1 - 2$ $0 = 0$ Det er altid sandt uanset *x* og alle tal er løsning

2) Se Video. Link: Ligninger

3) Gør øvelse med 4 ligninger:

1. $2x + 3 = x + 5$
2. $3x - 7 = 5x - 11$
3. $½b + 3 = 6 - b$ Bemærk: Den ubekendte behøver ikke at være ***x***.
4. $1/3\,x - 11 = 2x - 77$

Facits:

1. x=2
2. x=2
3. b=2
4. x=39,6

3) Løs ligninger interaktivt. **Link:** Ligninger

4) Løs E-opgaver. **Link:** E-opgaver 02 Ligninger

Link: Indholdsfortegnelse

Lektion 3: Eksponent og rod

Udfør følgende 4 punkter

1) Se video. Link: Eksponenter

2) Læs:

Eksponent

5·5·5 skrives forkortet 5^3 og udtales: ”Fem i tredje” eller ”Fem i tredje potens”.
3-tallet foroven kaldes eksponenten.
5^3 kan også skrives 5^3.
Vi arbejder også med eksponenter, der ikke er hele positive tal, fx $5^{2,5}$
Vi vil dog ikke her komme ind på hvordan disse eksponenter defineres.

Der arbejdes også med negative eksponenter. Betydningen fremgår af følgende eksempel:

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3}$$

Regler for regning med eksponenter
Disse regler vil ligeledes blive illustreret med eksempler:

$5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4}$ idet $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{3+4}$

$\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3}$ idet $\frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = 5^4$

$(5 \cdot 7)^3 = 5^3 \cdot 7^3$ idet $5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

$(5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4} = 5^{12}$ idet $(5^3)^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

$5^1 = 5$

$5^0 = 1$

$\frac{8^3}{5^3} = \left(\frac{8}{5}\right)^3$ idet $\left(\frac{8}{5}\right)^3 = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{8}{5} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{8}{5}$

Se regler for eksponenter

Rod

Hvis man ønsker at arbejde med et tal, som ganget med sig selv 3 gange giver 125, kan det skrives:

$\sqrt[3]{125}$

Der gælder

$\sqrt[3]{125}$ **=** 5 , fordi 5^3 = 125

$\sqrt[3]{125}$ udtales: **"Den 3. rod af 125"** og **ikke**: "~~Den 3. kvadratrod af 125~~"

Bemærk	$\sqrt[3]{125} = 125^{(1/3)} = 125\text{^}(1/3)$

Denne omskrivning er praktisk på lommeregner og nødvendig i regneark.

Bemærk endvidere: $\sqrt{9} = \sqrt[2]{9} = 9^{0,5} = 9\text{^}(1/5) = 3$

$\sqrt{9}$ *udtales: "Kvadratroden af 9" eller: "Den anden rod af 9"*

Se også formelsamlingen side 54 i **DEL 2** (blåt hæfte).

Bemærk: Nogle gange benyttes en særlig skrivemåde, især på lommeregnere.

Fx: **5e3** = $5 \cdot 10^3$ og **5e-3** = $5 \cdot 10^{-3}$

3) Løs denne øvelse: Link: [Eksponenter]

4) Løs E-opgaver: Link: [E-opgaver_03_eksponent_og_rod.htm]

Lektion 4: Overslagsregning, regnearternes hierarki og parentes mm.

Udfør følgende 5 punkter

1) læs:

Overslagsregning

Hvis man går rundt i et supermarked med 100 kr. på lommen, så skal man passe på at der ikke kommer mere i indkøbskurven end der er råd til. Når man ikke behøver et helt nøjagtigt resultat, kan man benytte overslagsregning. Her kan det være en stor hjælp at benytte overslagsregning. Man afrunder priserne, så de er lettere at regne med. Sædvanligvis foregår afrunding ved 5-reglen. Dvs: et ciffer rundes op, hvis næste ciffer er 5 eller mere; men ved overslagsregning er det anderledes.

Ved sum bør man skiftes til at runde op og runde ned, første gang afrundes efter 5-reglen.

Eks: 27,75 + 26,77 + 37,81 + 26,66
= ca. 30 + 20 + 40 + 20 = 110. Det præcise resultat er 118,99

Ved minus mellem to tal afrundes samme vej. Eks: 312 - 276 = ca. 310-270 = 40.
Ved gangestykker bør tallene afrundes hver sin vej. Eks: 7,1 · 7,4 = ca. 7 · 8 = 56
Ved brøk afrundes tæller samme vej som nævner. Eks: $^{71,2}/_{8,6}$ = ca. $^{72}/_{9}$ = 8

Regnearternes hierarki

Lad os beregne 5+2·3. Resultatet er 11. Bemærk at vi først udregner 2·3. Vi siger gange går forud for plus og taler om regnearternes hierarki.

Den hierarkiske orden er som følger:

1. Potensopløftning og rod
2. Gange og division
3. Plus og minus

Eksempel: $5-\frac{6}{\sqrt{9}}=5-\frac{6}{3}=5-2=3$

De størrelser i et regneudtryk, som adskilles af plus eller minus kaldes **led**.
De størrelser i et regneudtryk, som adskilles af gange kaldes **faktorer**.

Parenteser

Ved hjælp af parenteser kan regnearternes hierarki brydes, idet parenteser skal udregnes først.

Fx: $(3+5) \cdot 10 = 8 \cdot 10 = 80$

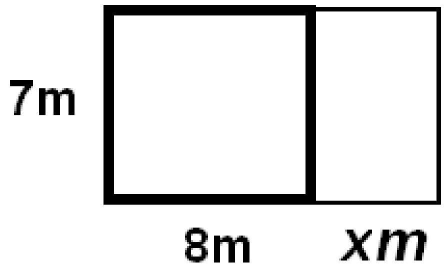
Hvis der er parentes inden i en parentes, skal den inderste udregnes før den yderste.

Fx: $(4^{(2+1)} + 5) \cdot 10 \;=\; (4^3 + 5) \cdot 10 \;=\; (64 + 5) \cdot 10 \;=\; 69 \cdot 10 \;=\; 690$

<u>Opgave:</u>
Jensen har et hus, som er 7 meter bredt og 8 meter langt .
Han vil gerne forlænge huset så meget som muligt; men kommunen vil kun tillade et hus på højst 100 m².
Hvor mange meter kan Jensen forlænge sit hus, når bredden fortsat skal være 7 meter?

Denne opgave kan løses ved at opstille en ligning; men vi får også brug for parentes.

<u>Besvarelse af opgaven:</u>
Forlængelsen i meter betegnes ***x***
Husets nye længde i meter bliver **8 + *x***
Målt i m² er det nye areal: **100** ;
men arealet er også **7 · (8 + *x*)**



Her har vi sat parentes uden om **8 + *x***.
Det betyder, vi i princippet skal udregne **8 + *x*** inden vi ganger med 7, hvilket er umuligt, da vi ikke kender ***x***
Imidlertid kan vi bruge en regel, som siger, at $\boldsymbol{7 \cdot (8 + x) = 7 \cdot 8 + 7 \cdot x}$

Denne regel kan udtrykkes med en formel: $\boldsymbol{k \cdot (a+b) = ka + kb}$

hvor ***k*** svarer til **7**, ***a*** svarer til **8** og ***b*** svarer til **x.**

Vi kan derfor opstille følgende ligning:

$$
\begin{array}{lcll}
7 \cdot (8 + x) & = & 100 & \Leftrightarrow \\
7 \cdot 8 + 7 \cdot x & = & 100 & \Leftrightarrow \\
56 + 7x & = & 100 & \Leftrightarrow \\
7x & = & 100 - 56 & \Leftrightarrow \\
7x & = & 44 & \Leftrightarrow \\
x & = & 6^2/_7 &
\end{array}
$$

Dvs. Jensen kan forlænge sit hus **$6^2/_7$ m**

Den regel vi brugte, kan udtrykkes ved:

Man ganger med en parentes ved at gange med hvert led i parentesen.

Vi vil ikke bevise formlen; men formentlig kender du den udmærket og bruger den tit uden egentlig at vide det, fx hvis du i hovedet skal udregne **7 · 12.**

Idet **12 = 10+2**, vil du formentlig sige: **7·10 + 7·2 = 70 + 14 = 84.**

Regnestykket kan skrives
$7 \cdot 12 = 7 \cdot (10 + 2) = 7 \cdot 10 + 7 \cdot 2 = 70 + 14 = 84$
Hvilket er i overensstemmelse med formlen.

Ved parentes gange parentes benyttes følgende regel, som vi heller ikke vil bevise:
Hvert led i den ene parentes ganges med hvert led i den anden.

Fx: $\boldsymbol{(x+3)(x+4)} = x^2 + 4x + 3x + 12 = \boldsymbol{x^2 + 7x + 12}$

og $\boldsymbol{(a+b)^2} = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b = a^2 + ab + ab + b = \boldsymbol{a^2 + b^2 + 2ab}$
hvor a og b er tal.

Se regler for parenteser

Fortegn ved multiplikation af 2 faktorer

Hvis faktorerne har forskelligt fortegn er resultatet negativt.
Eksempel: $3 \cdot (-5) = -15$

Hvis faktorerne har samme fortegn er resultatet positivt.
Eksempel: $(-3) \cdot (-5) = 15$

Se et eksempler fra dagligdagen på minus gange minus

Fortegn ved division

Hvis tæller og nævner har forskelligt fortegn er resultatet negativt. Fx: $^{20}/_{-5} = -4$

Hvis tæller og nævner har samme fortegn er resultatet positivt. Fx: $^{-20}/_{-5} = 4$

Absolut værdi (numerisk værdi)

Hvis et tal er negativt, er absolutværdien (også kaldet den numeriske værdi) af tallet lig tallet selv, men med positivt fortegn.
Der benyttes 2 lodrette streger for absolutværdi
Absolutværdien af et tal ***a*** skrives således: $|a|$ og er lig tallet selv med positivt fortegn.
Fx $|-5| = 5$ og $|5| = 5$. Ofte benyttes betegnelsen: ”Den numeriske værdi”.

2) Se video. Link: parentes og regler

3) Løs interaktivt. Link: Opgaver med parentes

4) Gør øvelse med følgende opgaver:

		Facits:
1.	$8(\frac{1}{2}x - 5) = x - 60$	$x = -6^2/_3$
2.	$2(x+(2 \cdot 3+2)) = \frac{1}{2}(5x - 17)$	$x = 49$

5) Løs E-opgaver **Link:** E-opgaver 04 parentes m.m.

Lektion 5a: Procent og rente

Udfør følgende 4 punkter

1) Læs:

Procent spiller en stadig større rolle i samfundsdebatten. Flere og flere henviser til procenter når de udtaler sig om dette eller hint.

Procent betyder pr 100.
Fx 2% betyder 2 pr 100 eller $^2/_{100}$ = 0,02

Man lægger 2 % til et tal ved at gange med 1,02 eller (1+2%)

Fx lægger man 2% til 300 ved at sige 300·1,02 = 306

Man kan også regne sig frem til 306 ved at sige 300 + 2% af 300 = 300 + 6 = 306; men det er mere besværligt, især ved *rentes rente*, som vi skal se på om lidt. .

Man trækker 10% fra ved at gange med (0,90) eller (1-10%).
Man kan sige der her er tale om at lægge -10% til.

Generelt gælder:

Man lægger p% til ved at gange med (1+p%) eller med (1+r) , hvor r = p%

(1+r) kaldes ***fremskrivningsfaktoren*** og
r kaldes ***rentefoden,*** hvis det handler om renter, ellers ***vækstraten.***
Hvis vi får 2% i rente pr termin, siger vi, at rentefoden er 2% eller 0,02

Renteformlen

Hvis et beløb forrentes gennem flere terminer, vil man også få rente af renterne. Det kaldes ***Rentes rente***.

Lad os betragte *300 kr* som forrentes med *2%* pr år i flere år:

Efter *0* år er beløbet *300 kr*
Efter *1* år er beløbet *300·1,02 kr*
Efter *2* år er beløbet $300\cdot1{,}02\cdot1{,}02$ *kr* = $300\cdot1{,}02^2$
Efter *3* år er beløbet $300\cdot1{,}02^2\cdot1{,}02$ *kr* = $300\cdot1{,}02^3$
Efter *4* år er beløbet $300\cdot1{,}02^4$
....
Efter ***n*** år er beløbet $300\cdot1{,}02^n$

De *300 kr* kaldes ***begyndelseskapitalen*** og betegnes K_0
Beløbet efter ***n*** rentetilskrivninger kaldes ***slutkapitalen*** og betegnes K_n eller blot ***K.***

Generelt gælder **renteformlen:** $\boxed{K = K_0\cdot(1+r)^n}$ Fx: $K_4 = 300\cdot1{,}02^4$

Den vil vi ikke bevise. Vi nøjes med ovenstående anskueliggørelse.

Bemærk: $K_0 = K_0\cdot(1+r)^0$, idet $(1+r)^0 = 1$ og $K_1 = K_0\cdot(1+r)^1 = K_0\cdot(1+r)$

Fremskrivningsfaktor

Når man ganger et tal med *1,02*, siger vi, at tallet er blevet fremskrevet med *2%* og *1,02* kaldes fremskrivningsfaktoren.

Generelt kan man sige, at hvis man har to tal forskellige fra nul, så kan man komme fra det ene tal til det andet ved at gange med en passende faktor.
En sådan faktor kaldes fremskrivningsfaktor.

Lad os betragte to tal 300 og 306.
Der gælder 306 = 300 · 1,02.
Her er 1,02 fremskrivningsfaktoren.

Man siger, 300 er blevet fremskrevet til 306 med fremskrivningsfaktoren 1,02.
Man kan også sige, at 300 er blevet fremskrevet til 306 med 2%

Når man kender de to tal 306 og 300 kan fremskrivningsfaktoren beregnes således:
$^{306}/_{300}$ = 1,02, og derefter kan man konkludere, at ændringen er 2%.

Ved rentesregning kaldes ***(1+r)*** for fremskrivningsfaktoren svarende til én rentetilskrivning, dvs. svarende til én termin.
Ofte siges blot fremskrivningsfaktor, og så er det underforstået, at det svarer til én rentetilskrivning.

$(1+r)^n$ er fremskrivningsfaktoren for ***n*** terminer.

Eksempel:
Vækstraten er 20%, så fremskrivningsfaktoren for 3 terminer er: $1{,}20^3 = 1{,}728$. Den procentvise ændring for samtlige 3 terminer bliver 72,8%

2) Se video.
Link: Procent og rente

3) Løs Øve-opgaver.
Link: Procent af tal

Tal +/- procent

Beregn slutkapital

4) Løs E-opgaver.
Link: E-opgaver 05 pct-rente

Lektion 5b: Annuitets-opsparing og -gæld

Udfør følgende 2 punkter

1) Læs:

Annuitetsopsparing

Her Jensen sparer sammen til udbetaling på et hus. En gang om året sætter han 40 000 kr i banken til 0,5 % pr år. Det gør han 10 gange.
Det kaldes en Annuitets-opsparing. Alle indbetalinger er lige store og indsættes på terminsdagen. Den procentvise rente er den samme hver termin.
Hvad er værdien af annuitetsopsparingen med renter og renters rente lige efter sidste indbetaling?
Det kan udregnes ved hjælp af regneark.
Lige før 2. indbetaling er værdien af opsparingen $40000 \cdot 1{,}005$
Lige efter 2. indbetaling er værdien af opsparingen $40000 \cdot 1{,}005 + 40000 = 80020$
Dette kan indtastes i regneark således:

	A	B
1	Antal indbetalinger	Værdi efter indbetaling
2	1	40000
3	2	=B2*1,005+40000
4	3	
5	4	
6	5	
7	6	
8	7	
9	8	
10	9	
11	10	

Ved herefter at taste ”Enter” udregnes celle B3 til 80200, som er værdien af opsparingen lige efter 2. indbetaling.
Lige før 3. indbetaling er værdien af opsparingen $80020 \cdot 1{,}005$
Lige efter 3. indbetaling er værdien af opsparingen $80020 \cdot 1{,}005 + 40000$
Derfor skal der i celle B4 stå: *”=B3*1,05+40000”* og tilsvarende i cellerne under.
Det opnås ved at markere cellerne B3 → B11 og taste Ctrl+d (d som i down).
Herefter ser regnearket sådan ud:

	A	B
1	Antal indbetalinger	Værdi efter indbetaling
2	1	40000
3	2	80200
4	3	120601
5	4	161204,005
6	5	202010,025
7	6	243020,0752
8	7	284235,1755
9	8	325656,3514
10	9	367284,6332
11	10	409121,0563

Og vi kan se at værdien af opsparingen lige efter 10. indbetaling er ***409121,06 kr***
Prøv selv at eksperimentere med regneark.
Der findes imidlertid også en formel:

$$\boxed{A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}}$$

Hvor ***A*** er er værdien af annuitetsopsparingen lige efter sidste indbetaling
b er beløbet, der betales hver termin.
r er rentefoden

Ved at indsætte i formlen fås

$$A = 40000 \cdot \frac{1{,}005^{10} - 1}{0{,}005} = \mathbf{409121{,}06}$$

Dvs. værdien af annuitetsopsparingen lige efter sidste indbetaling er ***409121,06 kr***

Dette kan også beregnes helt automatisk i RegneRobot.dk ved i **Guide & CAS** at vælge **Rente og %** .

Annuitetsgæld

Hvis man ikke har tålmodighed til at spare op, så kan man låne.
Det er meget almindeligt at låne til en fast rentefod og betale en fast ydelse hver termin.
Her taler vi om en annuitetsgæld.
Der er følgende to formler:

Gældsformlen: (Kaldes også Grynformlen)	Ved at isolere *y* fås:
$G = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$	$y = G \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-1}}$

G er gælden,
y er den faste ydelse
r er rentefoden
n er antal ydelser

Ved at indsætte y= 40000, r = 1,5% og n=10 ***i*** Gældsformlen fås

$$\boldsymbol{G} = 40000 \cdot \frac{1 - 1{,}015^{-10}}{0{,}015} = \mathbf{368887{,}38}$$

Hvis Jensen vil stifte en gæld på 409121,06 kr., så bliver den faste ydelse i kroner:

$$\boldsymbol{y} = 409121{,}06 \cdot \frac{0{,}015}{1 - 1{,}015^{-10}} = \mathbf{44362{,}71}$$

Også disse to beregninger kan gøres automatisk i RegneRobot.dk

2) Løs Øve-opgaver **Annuitets-opsparing** og **Annuitets-gæld**

Lektion 6: Lommeregner & CAS-værktøj

Udfør følgende 2 punkter

1) Læs:

Fysiske lommeregnere bruges mindre og mindre. I stedet anvendes hjemmesider med online lommeregner, fx: calculator.dk eller såkaldt CAS-værktøj,
fx: WordMat, GeoGebra.org og RegneRobot.dk eller regneark , som alle forklares her.

Fysiske lommeregnere

På de fleste lommeregnere indtastes eksponenter ved hjælp af **^**.
Fx 5^4 indtastes som regel: 5^4
Ved nogle lommeregnere benyttes tasten **x^y** eller **y^x** i stedet for **^**

Den største vanskelighed på de fleste lommeregnere er at indtaste rod-udtryk, og det gøres forskelligt fra lommeregner til lommeregner; men ofte er det lettere at omskrive et rod-udtryk til et udtryk med eksponent.

Eksempel: $\sqrt[3]{125} = 125^{(1/3)} = $ 125^(1/3)

og det sidste udtryk er let at indtaste på de fleste lommeregnere. Parentesen er vigtig.

Mellemresultater bør gemmes i lommeregnerens hukommelse. Det giver større nøjagtighed i beregningerne. Lommeregneren husker langt flere decimaler end den viser i displayet.

Du kan i en opgavebesvarelse fx skrive ***0,43…*** , og det betyder, at tallet er gemt i din lommeregner med langt flere end de viste 2 decimaler.

På de fleste lommeregnere kan du gemme mellemresultater ved at taste ***STO*** og derefter vælge et bogstav eller et tal. (*STO* er en forkortelse af det engelske ord *store*)
Når du senere skal regne videre på mellemresultatet, skal det ikke indtastes med alle sine decimaler. Man skal som regel blot taste ***RCL*** og det bogstav eller det tal, som du valgte, da du gemte mellemresultatet.
RCL er en forkortelse af det engelske ord *recall*.
Hvis ***RCL*** ikke står på selve tasten men oven over, så er det fordi, man skal benytte tastens sekundære betydning. Det gøres på de fleste lommeregnere ved først at taste ***2nd.***

På nogle lommeregnere kan man benytte bogstaver i regneudtryk.
Hvis du fx har gemt tallet ***27*** og valgt bogstavet ***B***, da du gemte, kan du taste ***3+B*** og få ***30***.

Calculator.dk

Der findes adskillige hjemmesider med online lommeregner bl.a. Calculator.dk.
Ved et klik i Calculator.dk kommer du til en vejledning, hvorfra du kan aktivere selve lommregneren.

I Calculator.dk skriver man regnestykket og taster *Enter*. Så kommer facit, og regnestykket bliver vist i matematikformat, så man bedre kan kontrollere for korrekt indtastning. Det er især relevant ved brøker som fx ”(5+5)/2”, hvor parentesen ofte glemmes.
Hvis man skriver **a=2*3**, huskes facittet 6 i bogstavet **a**, og man kan så senere fx skrive 5a og få svaret 30. Det er især praktisk ved mellemresultater med mange decimaler.

WordMat

Er et udvidelsesmodul til Word og benyttes offline. Her kan du skive formler i matematik-format.
Du taster **Alt+m**, og derefter kan du i en lille boks skrive matematik i IT-format, som straks konverteres til matematik-format. Fx konverteres ” 5^3 ” til ” 5^3 ” .
Hvis du skiver et regneudtryk i en boks og taster **alt+b**, så beregnes værdien af udtrykket.
Hvis du skriver en ligning og taster **alt+l** (l som i ligning), så findes løsningerne til ligningen.
WordMat har mange faciliteter. Ikke alle er aktuelle på dette sted i undervisningen. Du kan finde flere vejledninger til WordMat på dansk ved at søge på nettet med søgeordene: "Vejledning til Wordmat".
Link til download af WordMat: http://www.eduap.com/wordmat/

GeoGebra

er et såkaldt CAS-værtøj og er en god hjælp til næsten al matematik, især geometri.
GeoGebra kan anvendes både online og Geogebra kan downloades.
GeoGebra vil blive anvendt i nogle af de følgende lektioner, og det er ikke nødvendigt at fordybe sig i GeoGebra på dette sted i undervisningen.
I GeoGebra-vinduet er et Input-felt. Her kan du bl.a. skrive regneudtryk og få resultatet beregnet. Hvis du vil løse en ligning, kan du fx skrive: ***Løsninger(x^2=25)***

Du kan finde vejledninger til GeoGebra på dansk ved at søge på nettet med søgeordene: "Vejledning til GeoGebra".

Links til brug online: geogebra.org/classic ,

Link til download ved brug offline: geogebra.org/download

RegneRobot.dk

RegneRobot er også et såkaldt CAS-værktøj og hjælper med at løse opgaver.
RegneRobot er samtidig en matematik-editor, der er beregnet til at hjælpe med at få en pænere opstilling.
RegneRobot konverterer automatisk og umiddelbart fra IT-format til matematik-format.

Fx konverteres ” 5^3 ” til ” 5^3 ”. Det er meget hurtigt at skrive matematik i RegneRobot og regneudtryk beregnes automatisk.

RegneRobot indeholder mange faciliteter, der kun er anvendelige på et senere sted i undervisningen, men også faciliteter, der med fordel kan anvendes nu.
Link til udførlig manual: Vejledning.
Link til brug online: RegneRobot.dk
Link til download ved brug offline findes øverst på samme hjemmeside RegneRobot.dk .
Måske skal du scrolle op til toppen af hjemmesiden. Klik i 

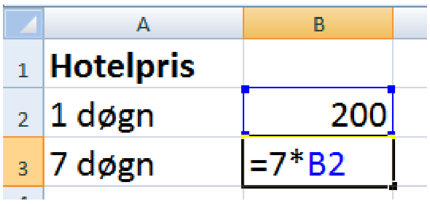
Regneark

Det mest benyttede regneark er Microsoft Excel. Et regneark er et computerprogram og der vises et net af celler. Hver celle udpeges ved et bogstav og et tal.
Bogstavet fortæller hvor langt til højre cellen er, og tallet viser i hvilken række.
Man kan skrive tal og almindelig tekst i hver celle. Tekst bør indledes med en apostrof.
Desuden kan man skrive regneudtryk. Regneudtryk skal starte med et lighedstegn.

I Microsoft Excel kan antal decimaler styres ved at klikke i eller , som du finder i en menulinje foroven i fanen ”Startside”.

Sådan laves beregninger

Aktiver regneark og udfyld som vist her til højre.
Udfyld celle B3 til sidst. Når du derefter trykker **Enter**, vil det specificerede regnestykke i celle B3 blive beregnet.
=7*B2 betyder, at *7*200* skal beregnes, fordi der i celle B2 står 200.



Oersigt over regnearter i regneark

Regneart		Eksempel	Nedenstående udregnes, idet indholdet af B3 er 20
+	Plus	=B3+5	20+5
-	Minus	= B3-5	20-5
*	Gange	= B3*5	$20 \cdot 5$
/	Division	=B3/5	$^{20}/_{5}$
^	Potensopløftning	=B3^5	20^5
	Rod	=B3^(1/5)	$\sqrt[5]{20}$

Bemærk, at der ikke er noget rodtegn i regneark. Man klarer sig med potens.
Du kan finde flere vejledninger til regneark på dansk ved at søge på nettet med søgeordene: "Vejledning til regneark".

2) Løs E-opgaver. Link: E-opgaver 06 lommeregner

Lektion 7:

Procent og rente fortsat, gennemsnitlig %-vis ændring

Udfør følgende 4 punkter

1) Læs

I lektion 5 så vi renteformlen: $\boxed{K = K_0 \cdot (1+r)^n}$

Ved hjælp af den kan man udregne slutkapitalen ***K***, når man kender begyndelseskapitalen K_0, rentefoden ***r*** og antallet af terminer ***n***.

Nogen gange kender man slutkapitalen, men ikke begyndelseskapitalen og vil gerne beregne den. Andre gange kender man ikke rentefoden og vil gerne vide den. Atter andre gange vil man gerne bestemme antallet af terminer.

Vi skal i denne lektion se på de ting.

Begyndelseskapitalen K_0

Vi vil først finde en formel for K_0
Vi isolerer K_0 i renteformlen ved at dividere med $(1+r)^n$ på begge sider af lighedstegnet og får:

$$\frac{K}{(1+r)^n} = K_0$$

Det kan også skrives:

$$K \cdot (1+r)^{-n} = K_0$$

og hermed har vi en formel for K_0 skrevet på 2 måder.

Hvis et beløb fx vokser med 20% pr år og efter 4 år er blevet til 414,72 kr, kan vi beregne startbeløbet 4 år før således: $414{,}72 \cdot 1{,}20^{-4}$ *kr* = ***200,00 kr***

Rentefoden / vækstraten *r*

Vi bemærker, at vækstrate og rentefod betyder det samme; men vi siger rentefod, hvis det handler om renter.

Vi vil nu se, hvordan man bestemmer ***r*** .
Vi forudsætter, at ***r*** er konstant, dvs ***r*** ændrer sig ikke fra termin til termin.

Når man skal bestemme ***r*** , kan det gøres ved først at bestemme fremskrivningsfaktoren og så trække én fra, idet *(1+r) – 1 = r*
Derefter kan man gange med *100%*, hvis man ønsker ***r*** i %.

Eksempel 1:
Ole optager et kviklån på 1000 kr til en fast årlig rentefod.
Lånet skal tilbagebetales efter 4 år.
Ole får et sjok.
Det viser sig, at Ole skal tilbagebetale lånet med 16000 kr efter kun 4 år.
Hvad har den årlige rentefod været?

Vi indsætter de størrelser, vi kender i renteformlen	$K = K_0 \cdot (1+r)^n$
*og får en ligning med **r** som ubekendt:*	$16000 = 1000 \cdot (1+r)^4$
Vi dividerer ligningen med 1000	$16 = (1+r)^4$
Vi tager den fjerde rod på begge sider (Man kan ikke tage den fjerde rod af negative tal; men her er tale om positive tal. Ligningen passer stadig, for vi har taget den fjerde rod af to lige store størrelser).	$\sqrt[4]{16} = (1+r)$
Vi udregner $\sqrt[4]{16}$ *og hæver parentesen*	$2 = 1+\boldsymbol{r}$
Vi trækker 1 fra på begge sider	$2 - 1 = \boldsymbol{r}$
Vi trækker 1 fra på begge sider	$1 = \boldsymbol{r}$

Konklusion: **Rentefoden er *1 = 100%***
Det kan yderligere bemærkes:
Den årlige fremskrivningsfaktor (1+***r***) er 2 (Dvs. gælden fordobles hvert år.)
Den 4-årige fremskrivningsfaktor er 16
Gælden vokser med 1500% på 4 år, nemlig (16-1)·100%

Ovenstående beregning er lavet under forudsætning af, at rentefoden er konstant.
Hvis rentefoden ikke er konstant, kan vi alligevel lave ovenstående beregning.

Den værdi ***r*** , vi beregner på ovenstående måde, kaldes så:

Den gennemsnitlige rentefod

Eller: Den gennemsnitlige vækstrate

Eller: Den gennemsnitlige procentvise ændring.

Dvs. Den gennemsnitlige rentefod er lig med den konstante rentefod, der ville give samme slutkapital.

Tilsvarende med gennemsnitlig vækstrate og den gennemsnitlige procentvise ændring.

Eksempel 2:
Benzinprisen er i løbet af 3 år steget fra *10,00 kr*. pr. liter til *13,31 kr*. pr. liter.
Den procentvise prisstigning har været forskellig fra år til år, så det giver ingen mening at beregne den årlige vækstrate, men vi kan beregne den gennemsnitlige årlige vækstrate.

Den 3-årige fremskrivningsfaktor er: $^{13,31}/_{10,00} = 1{,}313$

Altså $\boldsymbol{(1+r)^3 = 1{,}131}$, *idet* $\boldsymbol{r}$ *er årlig gennemsnitlig vækstrate.*

Den ét-årige gennemsnitlige fremskrivningsfaktor er $(1+r) = \sqrt[3]{1{,}331} = 1{,}10$

Konklusion: ***Den gennemsnitlige årlige vækstrate for prisen er 10%***

Man kan **ikke** beregne gennemsnitlig vækstrate ~~ved blot at lægge de forskellige vækstrater sammen og dividere med antallet af terminer~~.

Eksempel 3:
100 kr forrentes gennem 2 år.
Det første år er den årlige rente 20% og den næste år er den årlige rente 80%.

Den gennemsnitlige fremskrivningsfaktor er $\sqrt[2]{1{,}20 \cdot 1{,}80} = 1{,}47$

Den gennemsnitlige procentvise ændring er ***47%*** *og* ***ikke*** ~~*(20%+80%)/2= 50%*~~

Antal terminer *n*

Hvis antallet af terminer ***n*** er eneste ukendte størrelse, kan ***n*** findes ved at gætte systematisk, eller ved at benytte Guide & CAS i RegneRobot, hvilket er tilladt ved anden delprøve til skriftlig eksamen. (Ved online RegneRobot bør RegneRobot være nævnt i undervisningsbeskrivelsen)
Vi skal senere i forløbet se, hvordan ***n*** kan bestemmes ved almindelig beregning.

2) Se video. Link: Gennemsnitlig rente / %-vis ændring

3) Løs øvelser. Links: Find slutkapitalen

Find startkapitalen

Find gennemsnitlig rentefod udfra K0 og K

Find gennemsnitlig rentefod ved r1, r2 ....

Og eventuelt dette Word-dokument: Rentesregning

4) Løs E-opgaver: Link: **E-opgaver 07 Rente og gennemsnitlig rente**

Lektion 8: Indekstal

Udfør følgende 4 punkter

1) Se: [Video: Indeks]

2) Læs:

Her følger en oversigt over prisen på blyfri benzin gennem nogle år.
Priserne er angivet i 1990-kr. (faste priser).

år	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
kr.	5,02	5,09	5,39	5,75	5,78	5,5	6,04	6,79	6,46	6,33	6,18	6,49

Det ses, at priserne både er steget og faldet, men steget mest. For at få et mere overskueligt overblik over prisændringerne, har man indført indekstal.
Man udvælger et år, som kaldes **basisåret**, og her sættes indeks til 100.
Indeks for de øvrige år findes ved at fremskrive 100 med samme fremskrivningsfaktor, som priserne fremskrives med. Man må således beregne denne fremskrivningsfaktor.

Lad os finde indeks for 1999 med 1993 som basis år.
Dvs. indeks i 1993 er 100.
Fremskrivningsfaktoren for benzin-prisen fra 1993 til 1999 er $^{6,04}/_{5,02}$
Indeks for 1999 bliver således $100 \cdot {}^{6,04}/_{5,02} = 120,3... = 120$.

Alle indekstal ses nedenfor:

år	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
kr.	5,02	5,09	5,39	5,75	5,78	5,5	6,04	6,79	6,46	6,33	6,18	6,49
Indeks	100	101	107	115	115	110	120	135	129	126	123	129

Man bemærker, at det er let at få overblik over prisudviklingen ved at kigge på indeks.
Fra 2003 til 2004 er stigningen i indeks: 129 – 123 = 6.
Man siger stigningen har væres 6 **procentpoint** eller 6 **point**.
Men bemærk, den **%-vise stigning** i samme periode er: $({}^{129}/_{123} - 1) \cdot 100\% = 4{,}9\%$

Hvis man kender indekstal svarende til et basisår, kan indekstal svarende til et andet basisår beregnes.

I ovenstående eksempel ses, at indekstallene følger priserne. Hvert indekstal er ca. *20* gange så stort som benzinprisen det pågældende år, mere præcist $^{100}/_{5,02} = 19.92$, hvor *100* er indekstallet for 1993 og *5,02* er benzinprisen i kr. samme år.

3) Løs interaktiv øvelse. [Øvelse i indeks] [Formler]

4) Løs E-opgaver: [E-opgaver 08 indeks.htm]

Lektion 9a:

Geometri, vinkler, areal af trekant og ensvinklede trekanter

Udfør følgende 2 punkter

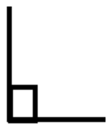
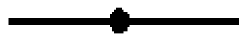
1) Læs

I denne lektion gennemgås en række begreber og regler, som er nyttige ved geometriske beregninger.

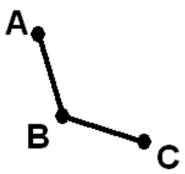
Præcise definitioner og argumenter vil blive behandlet i en senere lektion.

Vinkler

Vinkler måles i grader:

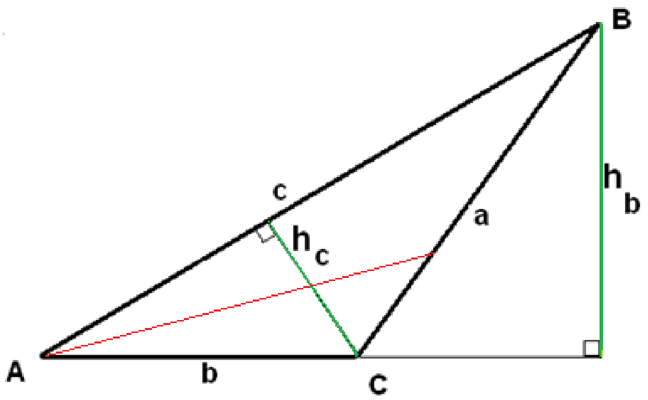
 En **spids vinkel** er under 90°	 En **ret** vinkel er 90° (Ofte markeres en ret vinkel med et lille kvadrat)	 En **stump** vinkel er mellem 90° og 180°	 En **lige** vinkeler180°

(Man kan også måle vinkler i radianer. 180° = π radianer og π = ca 3,14)



Tre punkter fx A, B og C fastlægger en vinkel, der fremkommer ved at tegne fra A til B og videre til C.
B er vinklens toppunkt. Se tegning.
Vinklen betegnes **vinkel ABC** eller **∠ABC**

Trekanter, højder medianer og vinkelhalveringslinjer i trekanter



En trekant er fastlagt ved punkterne A, B og C. Ovenfor er tegnet en trekant med sort. Den er fastlagt ved punkterne A, B og C.
En trekant, der er fastlagt ved tre punkter A, B og C kan betegnes ΔABC.

En side i en trekant navngives almindeligvis med samme bogstav som vinklen overfor, men med et lille bogstav.
En trekant har 3 højder.
Højden på **c** h_c og højden på **b** h_b er indtegnet med grønt.
Højderne danner en ret vinkel med hver sin side.
Fra hver vinkelspids udgår endvidere en såkaldt **median** hen til midten af modstående side samt en **vinkelhalveringslinje**, der deler trekantvinklen i to lige store vinkler.
Vinkelhalveringslinjen fra **A** er tegnet med rødt.

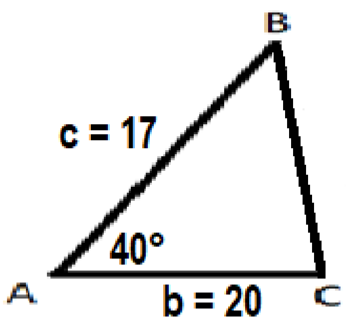
Vinkel B i trekant ABC betegnes ofte vinkel ABC eller ∠ABC
Vinkel A i trekant ABC betegnes ofte vinkel CAB eller ∠CAB

Trekantkonstruktion

Du kan meget let tegne en trekant både i WordMat ved at klikke i Δ og i RegneRobot ved at klikke i *"Guide & CAS"* og vælge: *"Geometri. Beregn størrelser i en Δ & tegn"*; **men** hvis du i en eksamensopgave blive bedt om at **konstruere** en trekant, er det **ikke tilstrækkeligt at tegne** den fx i RegneRobot eller WordMat. Du skal selv konstruere med et passende CAS-værktøj og forklare hvordan. Du kan gerne konstruere med Geogebra.
Her er link til GeoGebra online: https://www.geogebra.org/classic
Her er link til Geogebra download: https://www.geogebra.org/download

Her vises via et eksempel, hvordan du løser en konstruktionsopgave ved GeoGebra.

Eksempel på en konstruktionsopgave



Figuren viser trekant ABC, hvor $\angle A = 40°$, $b = 20$ og $c = 17$.

a) Konstruér en målfast tegning af trekanten.

b) Bestem ved hjælp af konstruktionen $\angle C$ med 5 decimaler.

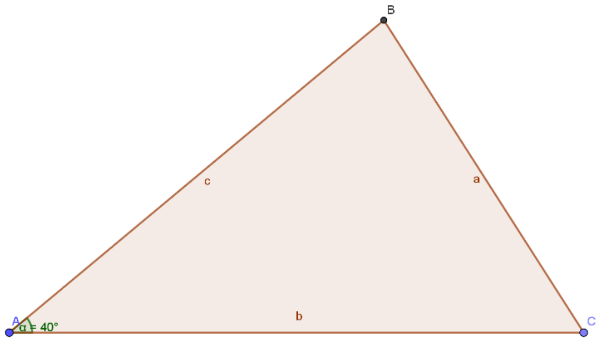
(Hvis prøvefigur ikke er vist i opgaven, kan du med fordel lave en prøvefugur i RegneRobot , "Guide & CAS" , "Geometri, beregn størrelser i en Δ & tegn", eller du kan tegne en prøvefigur i WordMat ved at klikke i Δ.)

Udførlig besvarelse af konstruktionsopgaven

(Denne besvarelse er beregnet til undervisning og er derfor mere udførlig, end hvad der kræves.)

a) Jeg skal konstruere en målfast tegning af trekant ABC hvor $\angle A = 40°$, $b = 20$ og $c = 17$

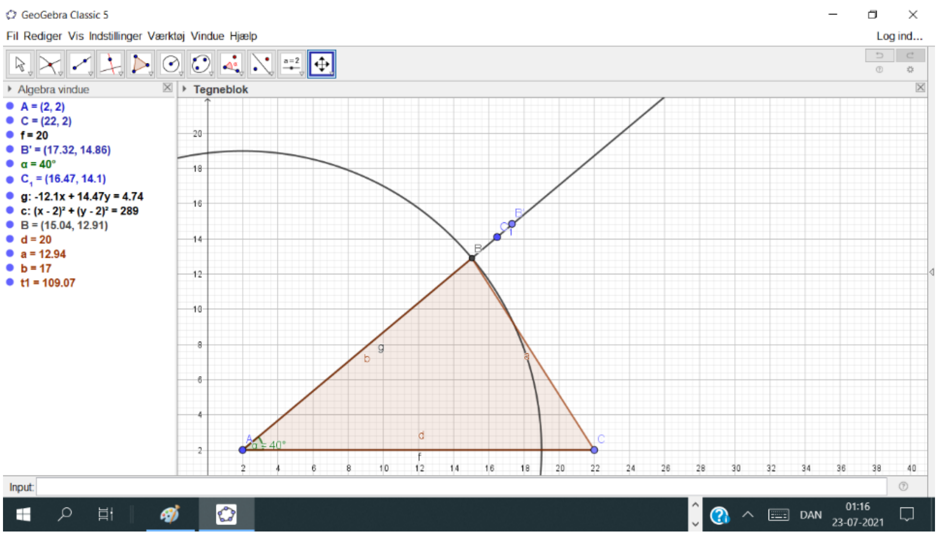
Det gjorde jeg ved hjælp af GeoGebra, og tegningen ses her.



1) Jeg flyttede koordinatsystemets begyndelsespunkt ned i venstre hjørne ved hjælp af musen med venstre musetast nede.
2) Jeg rullede med musehjulet, så 20 kom med på y-aksen og så 40 kom med på x-aksen.
3) Jeg klikkede i ikonet ”Linje” i menulinjen for oven, og der kom en rullegardin-menu.
4) Jeg valgte: ”Linjestykke med given længde”.
5) Jeg klikkede med musen i punktet (2.2), og der poppede et vindue op.
6) I vinduet skrev jeg linjestykkets længde 20, og linjestykket AB blev tegnet.
7) Jeg klikkede i ikonet ”Vinkel” i menulinjen foroven, og der kom en rullegardin-menu.
8) Jeg valgte: ”Vinkel med given størrelse”.
9) Jeg klikkede i punktet B og derefter i A, og der poppede op et vindue.
10) I vinduet skrev jeg vinklens størrelse 40° og valgte ”Med uret”, og der kom et punkt B´.
11) Jeg klikkede i linje-ikonet og valgte havllinje.
12) Jeg klikkede i punktet A og i punktet B´, hvorved halvlinjen blev tegnet.
13) Jeg klikkede i cirkel-ikonet og valgte: ”Cirkel ud fra centrum og radius”.
14) Jeg klikkede i punktet A, og der poppede et vindue op til angivelse af radius.
15) I dette vindue skrev jeg 17.
16) Jeg klikkede i punkt-ikonet og valgte: ”Skæringsværktøj”.
17) Jeg klikkede på skæringspunktet mellem cirklen og halvlinjen, og punktet blev navngivet C.
18) Jeg klikkede i polygon-ikonet, valgte ”Polygon” og jeg klikkede i punkterne A, B, C og A igen.

Geogebra navngav ikke punkterne A, B og C som de skulle være. Derfor omdøbte jeg ved at højreklikke 2 steder i Algebra-vinduet (venstre spalte) jeg og fik følgende skærmdump:

Så usynliggjorde jeg koordinat-akserne og gitterlinjerne ved at klikke tilfældigt i tegneblokken og vælge ”Akse” og ”Gitter”.
Derefter usynliggjorde jeg diverse objekter ved at højreklikke diverse steder i algebravinduet og hver gang klikke i ”Vis objekt”.
Endelig kopierede jeg den konstruerede tegning her til opgavebesvarelsen via ”Fil” og ”Eksporter”.
(En ekstra tegning som den til højre, der er med til at vise konstruktionsmetoden, skal med i opgavebesvarelsen.)



b) Ud fra konstruktionen skal vinkel C bestemmes med 5 decimaler. Jeg klikker Vinkel og Vinkel C’s to vinkelben og aflæser: **Vinkel C= *57,45675* °**

(Antal decimaler kan indstilles via ”Indstillinger” og ”Afrunding”)

Vinkelsummen af en trekant er altid 180°

Areal af en trekant

Arealet af en trekant er ½ højde · grundlinje
(hvor grundlinjen er siden vinkelret på højden)

Arealet = $\frac{1}{2}h_a \cdot a = \frac{1}{2}h_b \cdot b = \frac{1}{2}h_c \cdot c$ (Bemærk. h_a er ikke tegnet ovenfor)

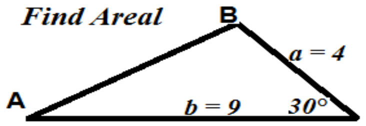
Formler

I formlerne til højre indgår Sin C, Sin A og Sin B. Det er tal som kan findes bl.a. på en lommeregner. Mere forklaring i næste lektion.

Areal: T er areal, h_a er højden på a, h_b er højden på b og h_c er højden på c	$T = 0{,}5 \cdot a \cdot h_a = 0{,}5ab \cdot \mathit{Sin}C$ $T = 0{,}5 \cdot b \cdot h_b = 0{,}5bc \cdot \mathit{Sin}A$ $T = 0{,}5 \cdot c \cdot h_c = 0{,}5ca \cdot \mathit{Sin}B$

Eksempel:

Her indgår Sin(30°), som kan findes bl. På en lommeregner.



T = 0,5·4·9·Sin(30°) = 0,5·4·9·0,5 = **9**

Ovenstående formler kan benyttes som ligninger, hvis man kender arealet og skal finde en anden størrelse i trekanten.

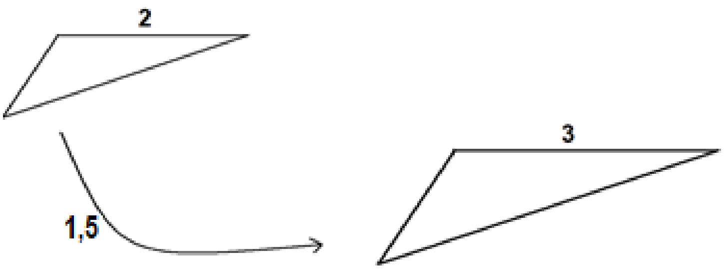
Ensvinklede trekanter

To trekanter kaldes ensvinklede, hvis vinklerne er parvis lige store. Enten er de to trekanter præcis ens eller også er den største en forstørrelse af den mindste.
Ved 2 ensvinklede trekanter defineres s**tørrelsesforholdet** eller **skalafaktoren** som den faktor, man skal gange sidelængderne med i den ene trekant for at få sidelængderne i den anden.
Hvis de to trekanter er præcis ens, så er størrelsesforholdet eller skalafaktoren 1.
Hvis størrelsesforholdet eller skalafaktoren er mellem 0 og 1, så er der tale om en formindskelse.
Hvis man kender længden på tilsvarende sider i de 2 trekanter, så kan størrelsesforholdet / skalafaktoren beregnes.

Til højre ses 2 ensvinklede trekanter.

Der gælder: skalafaktoren = $\mathbf{\frac{3}{2} = 1{,}5}$

Man kommer fra den lille trekant til den store ved at gange med 1,5 og man kommer fra store til den lille ved at dividere med 1,5, eller ved at gange med $\frac{1}{1{,}5} = \frac{3}{2}$



Nogle gange benyttes ordet **forstørrelsesfaktor** i stedet for størrelsesforhold eller skalafaktor. Det kan imidlertid være lidt misvisende, når skalafaktoren er mellem 0 og 1, hvor der er tale om en formindskelse.
Nogle gange siger man, at **forholdet** mellem de to trekanter er som **2 til 3**.

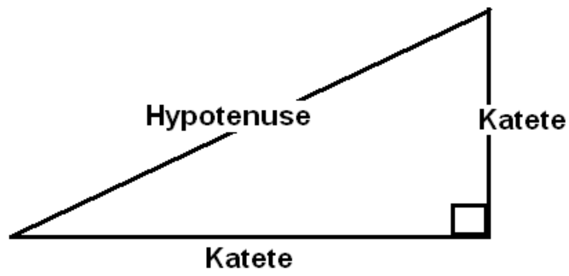
2) E-opgaver: [E-opgaver 9a ensvinklede trekanter]

Lektion 9b: Geometri, retvinklede trekanter, Sinus, Cosinus & Tangens

Udfør følgende 3 punkter

1) Læs

Hvis den ene vinkel i en trekant er 90°, så kaldes trekanten retvinklet.
En ret vinkel markeres ofte med et lille kvadrat.
Siden over for den rette vinkel kaldes hypotenusen.
De 2 andre sider kaldes kateter.

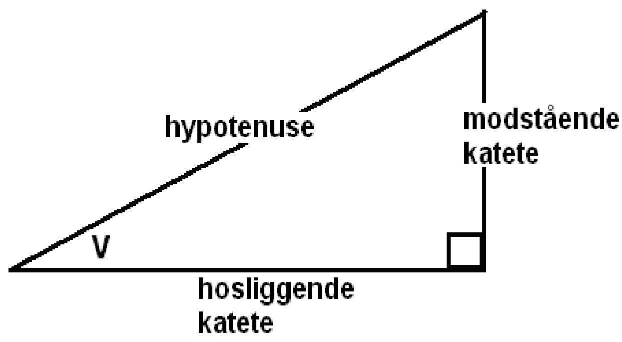


Sinus, Cosinus og Tangens

Hvis man kender 2 sider i en retvinklet trekant, kan man beregne de spidse vinkler ved at benytte Sinus, Cosinus og Tangens på lommeregneren, forkortet: ***Sin, Cos*** og ***Tan***.

Til enhver spids vinkel er knyttet et tal, vi kalder Sinus til vinklen.
Også til Cosinus og Tangens er knyttet et tal til enhver spids vinkel og der gælder:

Sinus til en spids vinkel i en retvinklet Δ er modstående katete divideret med hypotenusen.
Cosinus til en spids vinkel i en retvinklet Δ er hosliggende katete divideret med hypotenusen.
Tangens til en spids vinkel i en retvinklet Δ er modstående katete divideret med hosliggende katete.



$$Sin\ v = \frac{modstående\ katete}{hypotenusen}$$
$$Cos\ v = \frac{hosliggende\ katete}{hypotenusen}$$
$$Tan\ v = \frac{modstående\ katete}{hosliggende\ katete}$$

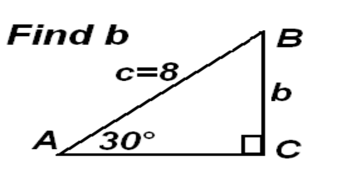
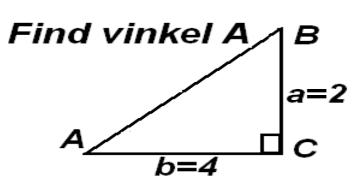
Definitionen af Sinus, Cosinus og Tangens kommer i en senere lektion.

Når man kender *Sin, Cos* eller *Tan* til en vinkel, kan selve vinklen findes ved hjælp af ***ArcSin***, ***ArcCos*** eller ***ArcTan***, som på de fleste lommeregnere betegnes med ***sin***$^{-1}$. (Tast først ***2nd*** og derefter ***Sin***.)

På nogle lommeregnere tastes ***inv*** i stedet for ***2nd***.

Hvis man kender en vinkel og en side i en retvinklet trekant kan de øvrige sider beregnes ved at betragte ovenstående formler som ligninger.

Eksempler:

	Sin(30°)= $^b/_8$ Dvs b = 8·Sin(30°) = 8·0,5 = 4
	Tan(A)= $^2/_4$ = 0,5 Dvs Vinkel A = 26,6° (Benyt Tan^{-1} eller ArcTan)

Trekantberegning med CAS-værktøj

Det er muligt at få automatisk trekantberegning med CAS-værktøj.

I Word med **WordMat** skal du klikke i ”WordMat” i menu-linjen foroven. Derefter skal du klikke Δ og der popper en tegning op, hvor du kan skrive de trekantstørrelser du kender. Ved at klikke i ”OK” bliver de øvrige størelser automatisk beregnet.

I **RegneRobot**.dk klikker du i: ”Guide & CAS”, og der kommer en rullegardin-menu.
Du vælger; ”Geometri. Beregn størrelser i en Δ og tegn”.
Herefter kan du indtaste de størrelser du kender og klikke i de størrelser, du ønsker beregnet.

2) Interaktive øveopgaver: **Retvinklede trekanter**

3) E-opgaver: **E-opgaver 9b geometri**

Link: Indholdsfortegnelse

Lektion 9c: Geometri, retvinklede trekanter, Pythagoras' sætning

Udfør følgende 4 punkter

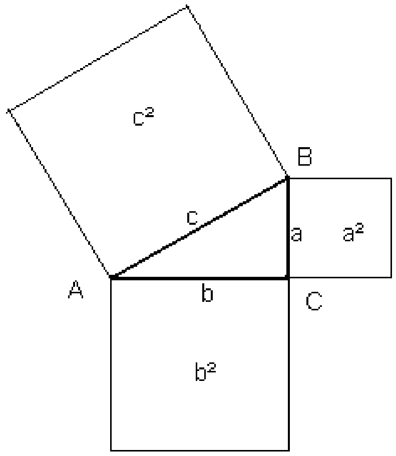
1) Se video. Link: Geometri

2) Læs

Pythagoras' sætning

Kvadratet på hypotenusen = summen af kateternes kvadrat.
Det er sædvane at navngive trekantens hjørnepunkter med store bogstaver.
Siden over for hvert hjørnepunkt navngives oftest med det tilsvarende lille bogstav
Hvis trekantens vinkelspidser får bogstav-navnene A, B og C, hvor C er den rette vinkel, så kan pythagoras' sætning udtrykkes således:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Hvis man kender to sider i en retvinklet trekant, kan man beregne den tredje side ved at indsætte de kendte størrelser i Pythagoras' sætning, og eventuelt løse en igning.

Se regler

3) Løs interaktivt: Opgaver i retvinklede trekanter

4) E-opgaver: E-opgaver 9c geometri

Lektion 9d: Geometri, vilkårlige trekanter

Udfør følgende 2 punkter

1) Læs

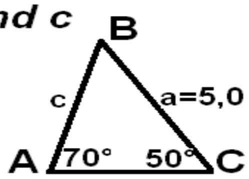
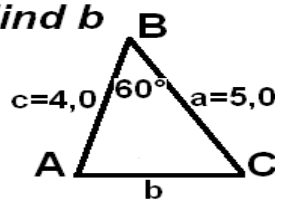
Vilkårlige trekanter

Ikke alle trekanter er retvinklede. Følgende formler gælder for enhver trekant ABC uanset om den er retvinklet eller ej.

Sinusrelationerne:	$\frac{Sin\ A}{a} = \frac{Sin\ B}{b} = \frac{Sin\ C}{c}$	$\frac{a}{Sin\ A} = \frac{b}{Sin\ B} = \frac{c}{Sin\ C}$
Cosinusrelationerne: (Også kaldet den udvidede Pythagoras)	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot Cos\ C$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot Cos\ B$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot Cos\ A$	$Cos\ C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ $Cos\ B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ $Cos\ A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

Se regler

Eksempler:

Find c 	$\frac{Sin(70°)}{5,0} = \frac{Sin(50°)}{c}$ Dvs. $c = \frac{5 \cdot Sin(50°)}{Sin(70°)} = 4,0$
Find b 	$b^2 = 5,0^2 + 4,0^2 - 2 \cdot 4,0 \cdot 5,0 \cdot Cos(60°) = 21,0$ Dvs. $b = \sqrt{21} = 4,6$

c og ***b*** kan også beregnes automatisk både ved Δ i WordMat og ved Guide & CAS i RegneRobot.dk.

Hvornår bruges hvilke formler ved trekantberegning ?

Kig efter, om der er ensvinklede trekanter
Vurder om areal-formlernn kan bruges
Hvis de 3 vinkler er i spil, så: Vinkelsum (i spil betyder er kendt eller ønskes beregnet)
Hvis 2 vinkler og de modstående sider er i spil, så Siusrelationerne.
Hvis alle 3 sider og en vinkel er i spil, så Cosinusrelationerne

Ved retvinklede trekanter:

Hvis kun sider er i spil: Pythagoras
Hvis en vinkel og 2 kateter er i spil: Tangens
Hvis hosliggende katete <u>ikke</u> er i spil: Sinus
Ellers: Cosinus

2) E-opgaver: E-opgaver 9d geometri

Lektion 9e: Geometri, Sinus, Cosinus og Tangens i regneark

Udfør følgende 2 punkter

1) Læs

Sinus, Cosinus og Tangens kan være lidt vanskelige for dig at bruge i regneark, så undgå det. Brug hellere RegneRobot eller WordMat.

I regneark benyttes ikke grader som vinkelmål, men en anden måleenhed til vinkler, der kaldes radianer. RegneRobot benytter grader ligesom de fleste lommeregnere. WordMat benytter som udgangspunkt grader, men kan indstilles til radianer.

180º = π radianer. (***π*** er ca. lig 3,14)

Som regel udelades radianer og man kan skrive ***180º = π***

I videregående matematik anvendes ofte radianer.

Man konverterer fra grader til radianer ved at gange med $\frac{\pi}{180}$

Man konverterer fra radianer til grader ved at gange med $\frac{180}{\pi}$

De omvendte funktioner til *Sin, Cos* og *Tan* betegnes på de fleste lommeregnere således: Sin^{-1}, Cos^{-1} og Tan^{-1}.

I regneark betegnes de ***ArcSin, Arccos*** og ***ArcTan***.

I WordMat kan man skrive: Sin^{-1}, Cos^{-1}, Tan^{-1} og *asin, acos, atan.*

I Geogebra kan man skrive: *ArcSin, Arccos, ArcTan* og *asin, acos, atan.*

I RegneRobot kan alle 3 slags betegnelser benyttes.

2) E-opgaver:

E-opgaver 9e geometri

E-opgaver 12 Regneark

Lektion 10a: Sammenhæng mellem variable, funktion

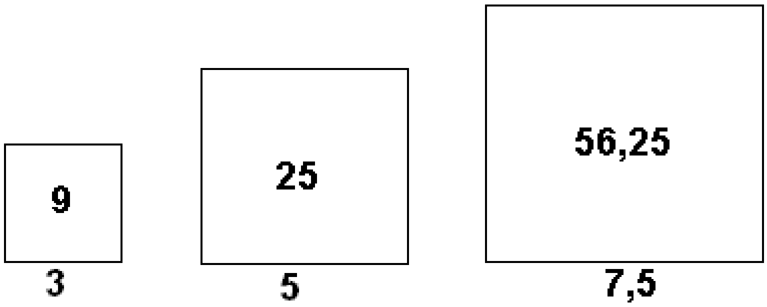
Udfør følgende 4 punkter

1) Læs

Variable

I matematik taler vi ofte om variable talstørrelser. Det kan fx være temperaturen målt i celsius-grader, der varierer. En talstørrelse, der varierer kaldes en **variabel.**

Et kvadrat er en firkant hvor alle vinkler er 90° og alle sider lige lange.
Lad os tegne et kvadrat på et stykke papir, der højst er 7,5 cm på hver led.
Hvis vi regner i cm, kan sidelængden variere fra 0 og op til 7,5.



Arealet kan variere fra 0 og op til 56,25.
Arealet af kvadratet afhænger af sidelængden og kaldes **den afhængige variable** mens sidelængden kaldes **den uafhængige variable**.
Hvis vi kalder arealet y og sidelængden x,
bliver arealet y bestemt ved regneforskriften: $\boldsymbol{y = x^2}$ (x^2 betyder $x \cdot x$, fx 5^2 betyder $5 \cdot 5$) .

Funktion

Man siger, at arealet $\boldsymbol{y}$ er en **funktion af** $\boldsymbol{x}$.

Det skrives $\boldsymbol{y = f(x)}$ og udtales "**y er lig f af x**"

Regneforskriften kan også skrives $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ eller $\boldsymbol{y = x^2}$.

Funktionen er defineret for alle tal $\boldsymbol{x}$ i intervallet 0 til og med 7,5.
Mængden af de tal $\boldsymbol{x}$, hvor funktionen er defineret, kaldes **definitionsmængden**.
Definitionsmængden for en funktion med navnet $\boldsymbol{f}$ kan forkortet skrives $\boldsymbol{D_m(f)}$

Ud fra regneforskriften $\boldsymbol{y = f(x) = x^2}$ får vi

Hvis $\boldsymbol{x}$ er 3 så er $y = f(3) = 3^2 = 9$ og hvis x er 4 så er $y = f(4) = 4^2 = 16$
Vi siger **funktionsværdien** af 3 er 9 og funktionsværdien af $7{,}5$ er $56{,}25$

Mængden af alle funktionsværdierne kaldes **værdimængden** for ***f*** og er intervallet fra *0* til og med *56,25.*
Værdimængden for en funktion med navnet ***f*** kan forkortet skrives $V_m(f)$

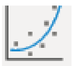
Grafen for en funktion

Ofte vil man præsentere en funktion grafisk i et koordinatsystem.

Et **koordinatsystem** består af 2 tallinjer vinkelret på hinanden. Den ene tallinje kaldes ***første-aksen*** eller ***x-aksen*** og den anden ***anden-aksen*** eller ***y-aksen***.

Hvis man vil tegne en funktionen, hvor man kender regneforskriften, bør man benytte CAS-værktøj, fx GeoGebra, WordMat eller RegneRobot.

I GeoGebra skrives regneforskriften i input-linjen.

I WordMat klikkes i ikonet 

I RegneRobot klikkes i ”Guide & CAS”, og du vælger ”Graf”.

Man kan godt tegne grafen manuelt uden CAS-værktøj, men det er mere besværligt og ofte bliver grafen unøjagtig. Derfor anbefales CAS-værktøj, som så vidt muligt bør bruges ved skriftlig eksamen.

Hvis man undtagelsesvis skal tegne en graf manuelt, udfyldes typisk et såkaldt sildeben med forskellige samhørende *x- og y-værdier*, såkaldte støttepunkter, som afsættes i et koordinatsystem og forbindes med en blød kurve.

Her vises hvordan man manuelt tegner grafen for ***f***, hvor $y=f(x)=x^2$, og $0 < x \leq 7{,}5$.

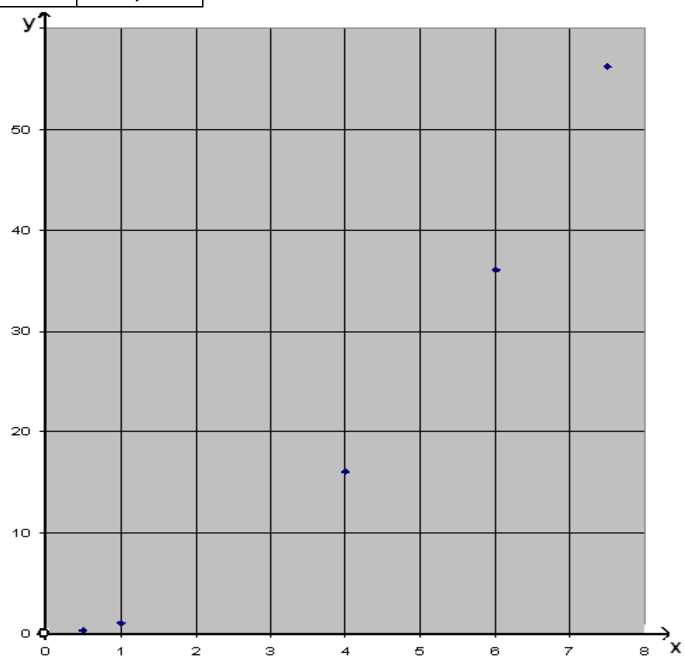
Selvom 0 ikke hører med, kan det alligevel være praktisk at have 0 med i sildebenet, men vi skriver 0 i parentes: (0). Den tilsvarende *y-værdi*, som også er 0 sættes ligeledes i parentes.

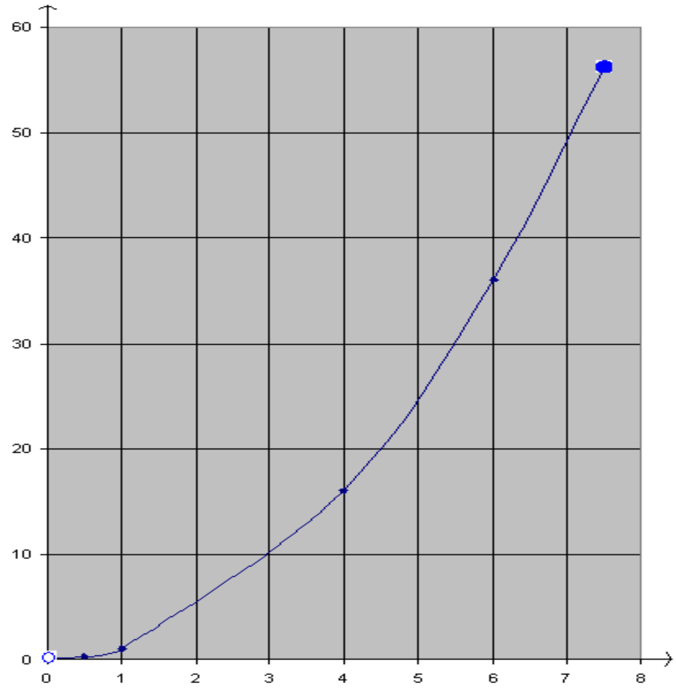
Støttepunkter for y = x².

x	(0)	0,5	1	4	6	7,5
y	(0)	0,25	1	16	36	56,25

Den første og sidste *x-værdi* er de to endepunkter i definitionsmængden. Resten af *x-værdierne* er valgt så de fordeler sig nogenlunde jævnt i definitionsmængden.

Hvert støttepunkt plantes ud for sin *x-værdi* på *x-aksen* og ud for sin *y-værdi* på *y-aksen.*





Når vi skal tegne grafen, vil vi som regel vælge at tegne en blød kurve gennem støttepunkterne:

Ved at forbinde grafpunkterne med en blød kurve antager vi, at vi har tegnet de punkter, hvor $y = x^2$, idet x for hvert punkt er punktets placering ud for *x-aksen,* mens y er punktets placering ud for *y-aksen*.
Denne antagelse giver imidlertid ikke et præcist billede af grafen. Fx ser det overfor ud som om f(3) er 10; men f(3) er faktisk 9.

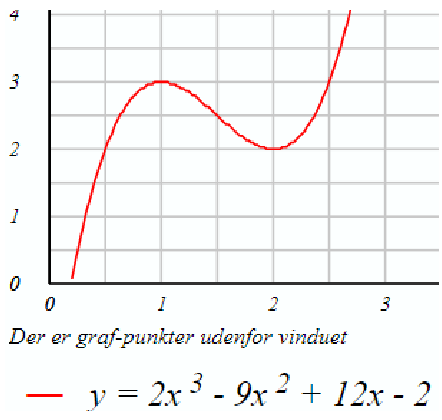
Grafpunktet (0.0) hører ikke med. Det er vist med en ring. Ikke alle CAS-værktøjer vil tegne denne ring, og det tages ikke så tungt om der kommer en ring.

Ethvert punkt i koordinatsystemet er bestemt ved et talpar ***(x, y)*** der kaldes punktets **koordinatsæt**.
x er punktets placering ud for *x-aksen* (også kaldet 1. aksen) og kaldes punktets *x-værdi* (eller punktets 1. koordinat).
y er punktets placering ud for *y-aksen* (også kaldet 2. aksen) og kaldes punktets *y-værdi* (eller punktets 2. koordinat).
Fx er ***(5 , 2.5)*** punktet ud for ***5*** på *x-aksen* og ud for ***2.5*** på *y-aksen* (Der er brugt decimalpunktum i stedet for decimalkomma. Det gøres ofte.)

Ekstrema for en funktion

Globalt maksimum er funktionens største værdi, hvis en sådan findes.
Globalt maksimumpunkt er tilsvarende grafpunkt.
Lokalt maksimumpunkt er et grafpunkt, der ligger højere end nabopunkterne.
Lokalt maksimum er tilsvarende funktionsværdi.

Globalt minimum er funktionens mindste værdi, hvis en sådan findes.
Globalt minimumspunkt er tilsvarende grafpunkt.
Lokalt minimumspunkt er et grafpunkt, der ligger højere end nabopunkterne.
Lokalt minimum er tilsvarende funktionsværdi.



Til højre ses grafen for en funktion med lokalt ekstremum for x=1 og for x=2. (1,3) er et lokalt maksimumspunkt og (2,2) lokalt minimumspunkt. Lokale ekstremarværdier er 3 og 2.
Der er hverken globalt minimum eller globalt maksimum, da funktionen kan antage vilkårlig små og vilkårlig store værdier.

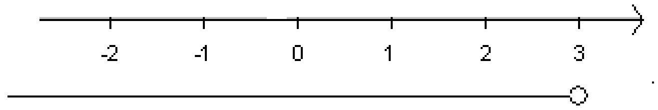
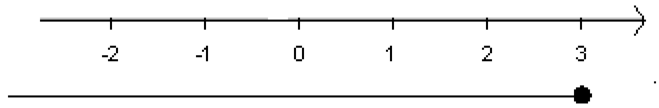
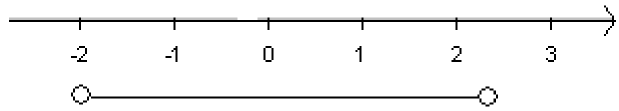
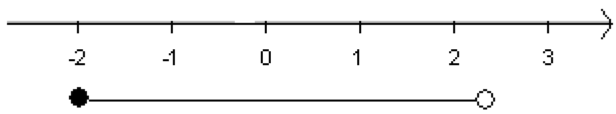
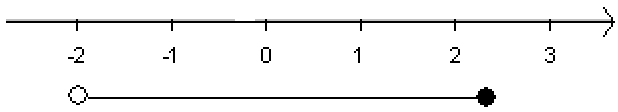
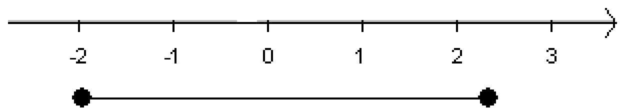
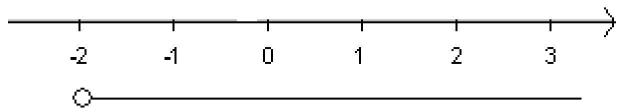
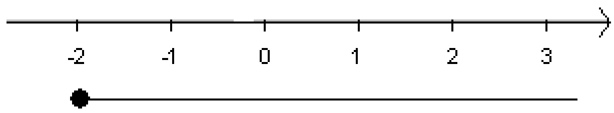
Monotoniforhold

Funktionen er voksende i **]-∞; 1]** og **[2; ∞[** og aftagende i **[1;2]**.

Intervaller

Ofte vil definitionsmængden og værdimængden være intervaller.

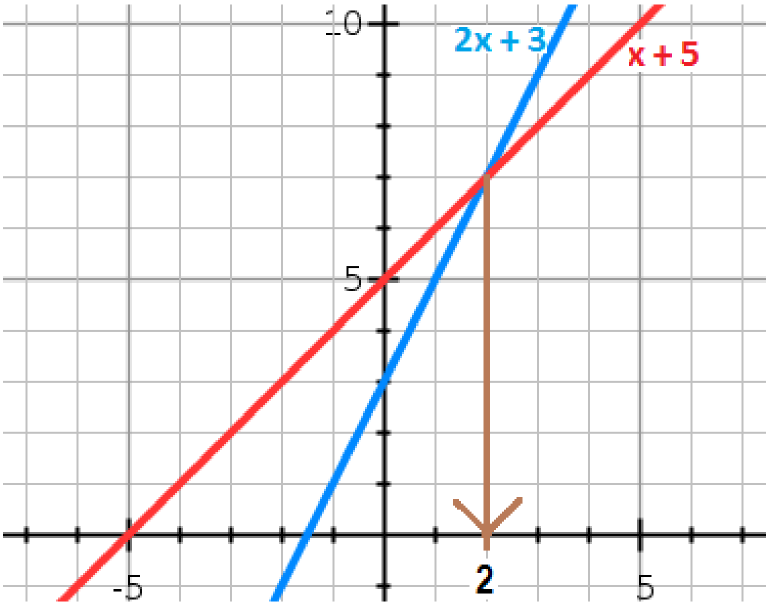
Ved intervaller benyttes nogle matematiske symboler, hvis betydning fremgår af følgende eksempler:

Interval-eksempel	Forklaring	Grafik
] -∞ , 3[	Åbent interval bestående af alle tal mindre end 3	
] -∞ , 3]	Halvåbent interval bestående af alle tal mindre end eller lig med 3	
]-2 ; 2,3[	Åbent interval bestående af alle tal mellem -2 og 2,3	
[-2 ; 2,3[	Halvåbent interval bestående af alle tal større end eller lig -2 og mindre end 2,3	
]-2 ; 2,3]	Halvåbent interval bestående af alle tal større end -2 og mindre end eller lig 2,3	
[-2 ; 2,3]	Lukket interval bestående af alle tal større end eller -2 og mindre end eller lig 2,3	
]-2 ; ∞[	Åbent interval bestående af alle tal større end -2	
[-2 ; ∞[	Åbent interval bestående af alle tal større end eller lig -2	

Grafisk løsning af ligning

Ligninger kan løses grafisk ved at tegne grafen for ligningens venstre side og grafen for højresiden.

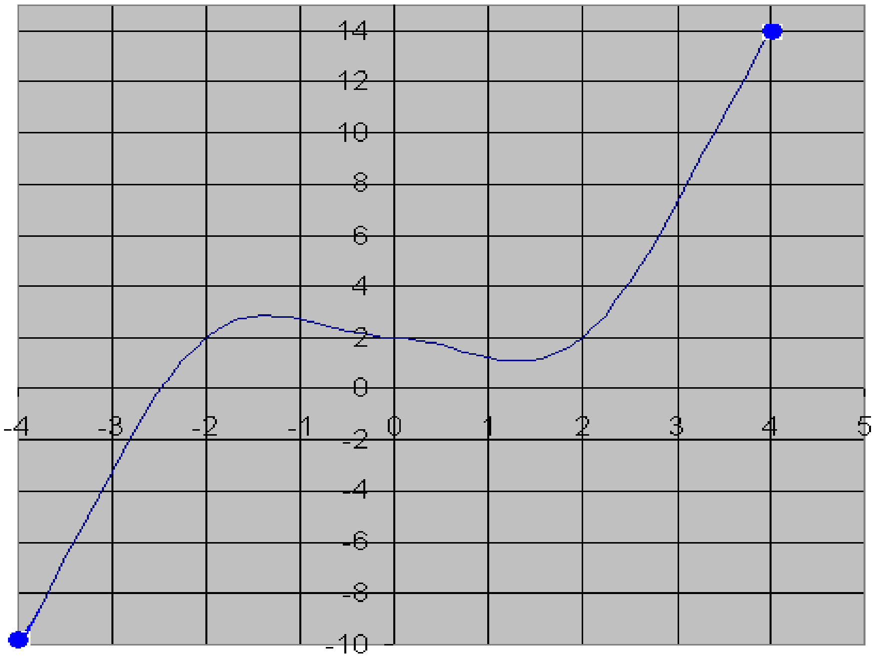
Eks: $2x + 3 = x + 5$



Det ses af tegningen at venstresiden er lig højre siden for $x = 2$

2) Løs disse opgaver (Der er facitliste sidst i denne lektion)

Betragt nedenstående graf for funktionen ***f*** og løs de følgende opgaver



Opgave 1

Udfyld de tomme felter

x	-4	-2	0	2	
y = f(x)					14

Opgave 2

Find *f(-2)*

f(-2) = $\boxed{}$

Opgave 3

Løs ligningen: f(x)=14

x = $\boxed{}$

Opgave 4

Løs ligningen: f(x)=2 Der er 3 løsninger, som kan skrives i en tuborg-parentes, også kaldet mængdeklamme og adskilles med komma.

Løsningsmængden = { , , }

Opgave 5

Hvad er definitionsmængden?

$D_m(f)$ = $\boxed{}$

Opgave 6

Hvad er værdimængden?

$V_m(f)$ = $\boxed{}$

Opgave 7

Globalt maksimum = $\boxed{}$

Facits:

Opgave 1

x	-4	-2	0	2	4
Y=f(x)	-10	2	2	2	14

Opgave 2

Find *f(-2)*: ***f(-2) =2***

Opgave 3

Løs ligningen: *f(x)=14*: ***x=4***

Opgave 4

Der er 3 løsninger, som kan skrives i en tuborg-parentes. Løsningsmængden = {-2, 0, 2}

Opgave 5

$D_m(f) = [-4; 4]$

Opgave 6

$V_m(f) = [-10; 14]$

Opgave 7

Globalt maksimum er 14

3) Se videoen: [Funktioner og grafisk løsning]

4) Løs E-opgaver [E-opg 10a variable]

Lektion 10b: Sammenhæng mellem variable, proportionalitet

Udfør følgende 4 punkter

1) Læs

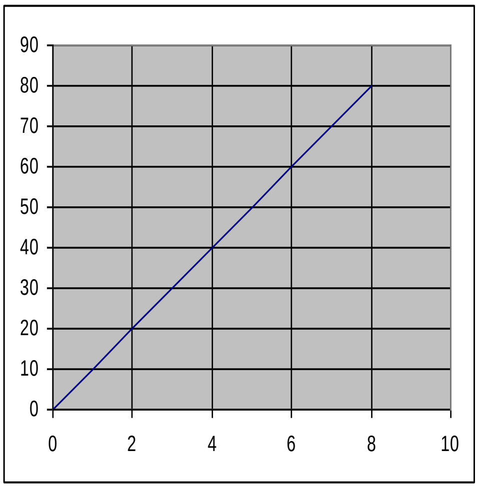
Proportionalitet

”Ligefrem proportional” eller blot ”proportional”

Hvis man køber benzin til 10 kr pr. liter, vil prisen i kroner være 10 gange så stor som antal liter.
Hvis antal liter kaldes *x* og prisen kaldes *y*, gælder $\boldsymbol{y=10x}$.

Vi siger *y* er **proportional** eller **ligefrem proportional** med *x* og at **proportionalitetsfaktoren** er 10.

Grafen til højre viser sammenhængen mellem ***x*** og ***y***



I nedenstående tabel ses, at indekstallet er proportionalt med timelønnen. Proportionalitetsfaktoren er 4.

Årstal:	1970	1980	1990
Timeløn i kr:	25	50	150
Indekstal:	100	200	600

Omvendt proportionalitet

Hvis vi har 420 havefliser og vil lave en terrasse kan vi fx lægge 42 fliser på den ene led og 10 fliser på den anden.
Terrassen er et såkaldt rektangel. Se tegningen, hvor $x = 42$ og $y = 10$.

y = 10

x = 42

Vi kan også vælge at lægge 21 fliser på den ene led og 20 på den anden.
Se tegning, hvor $x = 21$ og $y = 20$.

y = 20

x = 21

Vi ser at når *y* gøres dobbelt så stor, så bliver *x* halv så stor.

Endvidere gælder, at hvis vi havde gjort *y* tre gange så stor altså til 30 så ville *x* blive tre gange så lille, nemlig 14.

Vi kunne også gøre *x* dobbelt så stor til 84, men så måtte vi også gøre *y* dobbelt så lille, nemlig 5.

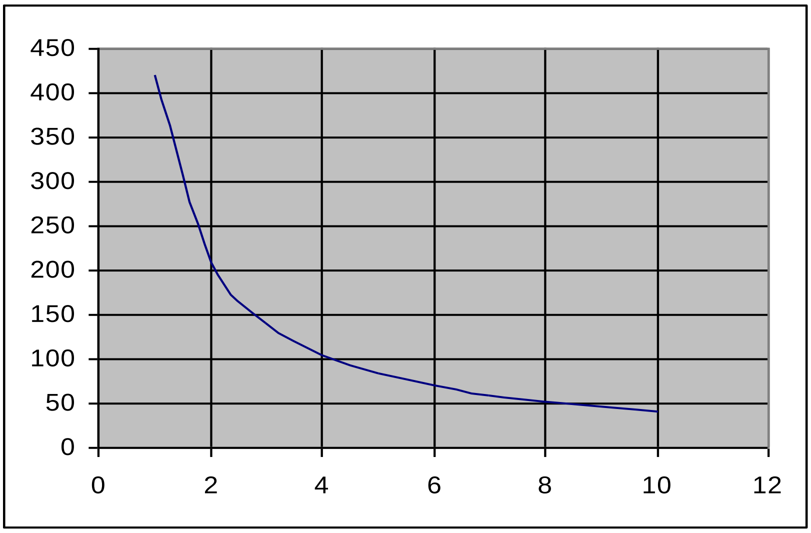
Generelt gælder der følgende sammenhæng mellem *x* og *y*:

$$y = 420 \cdot \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$x \cdot y = 420$$

Vi siger *y* og *x* er omvendt proportionale med proportionalitets-faktoren 420.

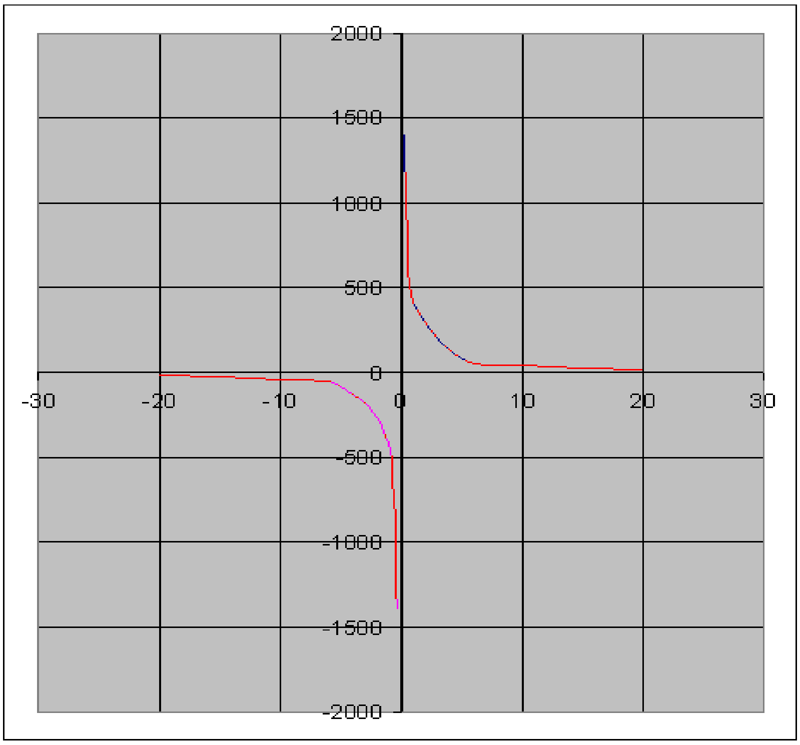
For *x* mellem 1 og 10 ser grafen for y således ud:



I ovenstående tilfælde med fliser er *x* større end nul.

Bemærk: Regneudtrykket $420 \cdot \frac{1}{x}$ har ingen mening for ***x*** lig nul; men man kan godt beregne værdien af udtrykket for negative ***x***.

For ***x*** forskellig fra nul ser grafen således ud:



Bemærk: Ovenstående illustrerer ikke flise-eksemplet, hvor ***x*** > 0 ; men blot regneforskriften:

$$y = 420 \cdot \frac{1}{x}$$

3) Løs interaktiv opgave. Link: [Proportionalitet]

4) Løs E-opgaver Link: [E-opg 10b Proportionalitet]

Link: Indholdsfortegnelse

Lektion 11a: Lineære funktioner

Udfør følgende 4 punkter

1) Se: [Video med lineær funktion]

2) Læs:

Definition:
Hvis en størrelse ***y*** afhænger af en anden størrelse ***x*** , således at ***y = a·x+ b*** , hvor ***a*** og ***b*** er tal, så siger vi at der er tale en lineær sammenhæng mellem ***x*** og ***y***.
Vi siger også: ***y*** er en **lineær funktion** af ***x***. Grafen er en linje eller en del af en linje.
Tallet ***a*** kaldes hældningskoefficienten og tallet ***b*** kaldes begyndelsesværdien.
Bemærk: Hvis x er defineret for $x = 0$, så er $\boldsymbol{f(0)} = a \cdot 0 + b = \boldsymbol{b}$

Eksempel 1
I lektion 1 så vi et eksempel på en taxa der kostede 25 kr i startgebyr og 12 kr pr km.
Prisen kan beregnes ud fra formlen eller regneforskriften: ***y = f(x) = 12x + 25***,
hvor ***y*** og ***f(x)*** er prisen i kroner mens ***x*** er antal km.

f en lineær funktion.

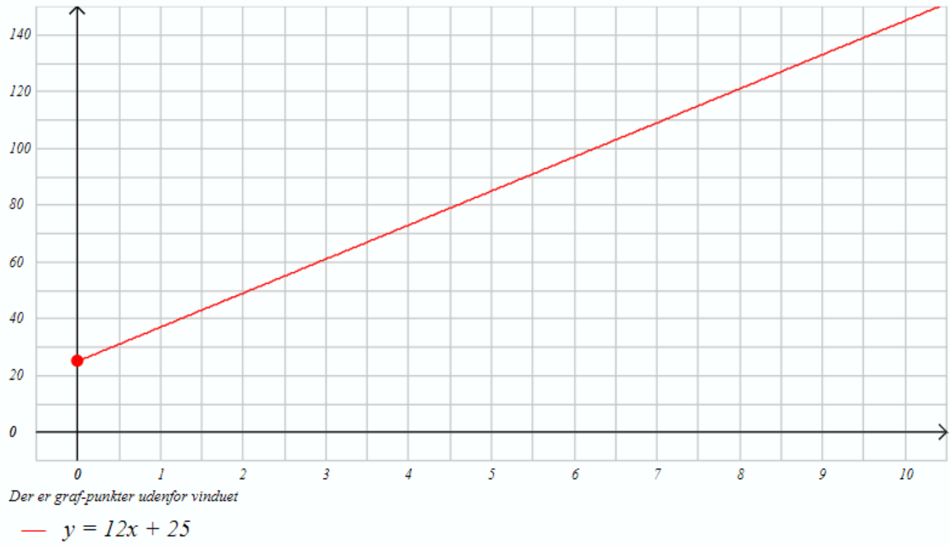
Da $x \geq 0$ bliver grafen en halvlinje.

Grafen for ***f*** ses til højre.

y afhænger af ***x***, og ***y*** er en lineær funktion af ***x*** .

y = f(x), hvor *f(x) = 12x + 25*

f(x) udtales: "f af x".



Bemærk:
10 km koster så mange kroner:
$f(10) = 12 \cdot 10+25 = 120+25 = 145$

20 km koster så mange kroner:
$f(20) = 12 \cdot 20+25 = 240+25 = 265$

Hvis man fortryder en taxatur lige efter, at taxameteret er startet, så koster det så mange kroner: $f(0) = 12 \cdot 0+25 = 25$, som er begyndelsesværdien.

Hældningskoefficient

Af grafen kan man fx aflæse, at *x-værdien* 5 giver *y-værdien* 85. Vi skriver *f(5)=85*.
Hvis vi gør *x-værdien* én større til 6, kan vi af grafen aflæse, at funktionsværdien forøges med 12 svarende til, at én ekstra km koster 12 kr mere.

Vi bemærker, ligegyldigt hvor langt vi har kørt, så vil en ekstra km koste 12 kr mere.

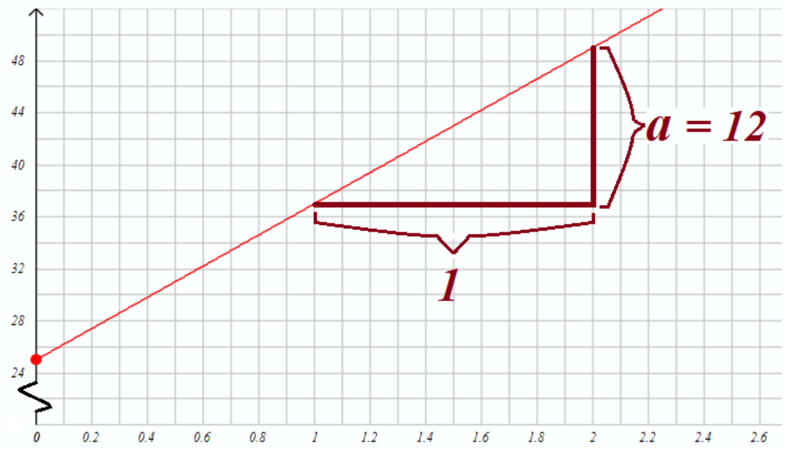
Man kan bevise, at for lineære funktioner gælder generelt: Ligegyldigt hvilken *x-værdi*, man betragter, så vil ***y*** vokse med samme tal, hvis ***x*** gøres én større og dette tal kaldes hældningskoefficienten.

Hældningskoefficienten er ændringen i ***y*** når ***x*** bliver én større.
Hældningskoefficienten kaldes ofte ***a***.
Hvis ***a > 0*** (større end nul), så er funktionen voksende.
Hvis ***a < 0*** (mindre end nul), så er funktionen aftagende.
Hvis ***a = 0***, så er funktionen konstant og grafen vandret, altså **parallel** med første-aksen.

Bemærk: Hældningskoefficienten ***a*** viser grafens hældning.

a er det stykke grafen løfter sig når ***x*** bliver én større.

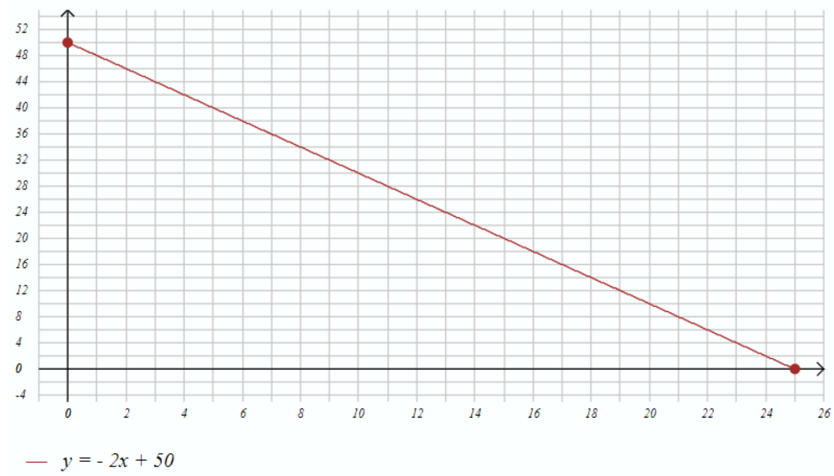
I eksemplet med taxaen er ***a****= 12* og ***b****=25*.



Begyndelsesværdien er det tal på *y-aksen*, hvor grafen eller dens forlængelse skærer *y-aksen.*

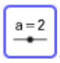
<u>Eksempel 2</u>
Den 1. april 20120 lagrer Olsen 50 liter rødvin i en stor beholder.
Desværre er der et lille hul i bunden af beholderen, og vinen siver ud med 2 liter i døgnet, og efter 25 døgn er beholderen tom.

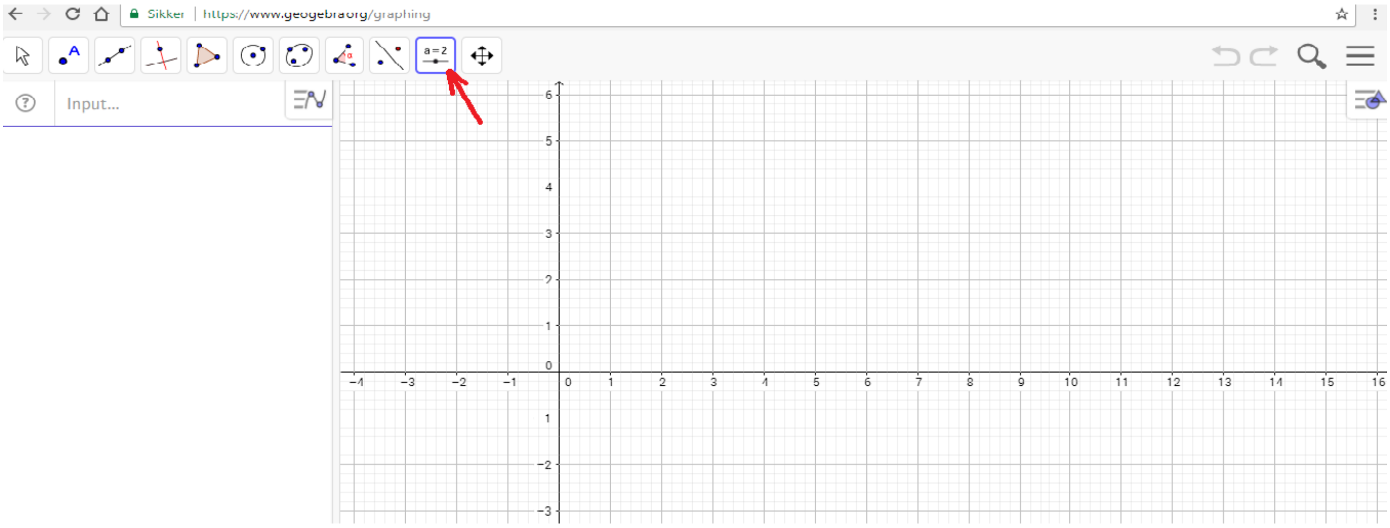
Dette fænomen kan beskrives med følgende model: ***f(x) = -2x+50*** ,
hvor ***x*** er antal døgn efter 1. april 2020 og ***f(x)*** er antal liter vin i beholderen ***x*** dage efter 1. april 2020. $0 \leq x \leq 25$
Dette er et eksempel med et negativt ***a***, nemlig ***-2****.*
Det er en aftagende funktion. Grafen ses til højre.



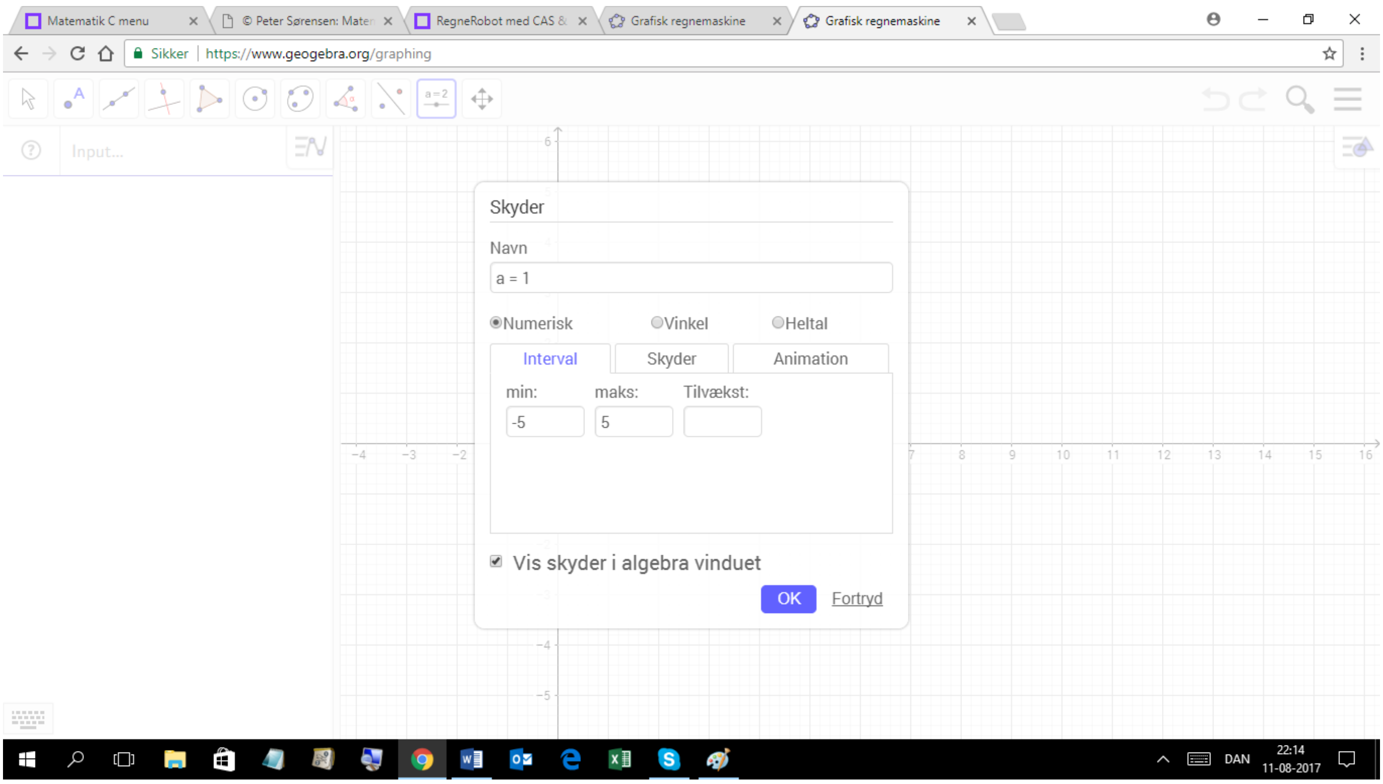
a og b’s betydning for grafen

Vi skal nu se nærmere på ***a*** og ***b***’s betydning for grafen.
Dette illustreres glimrende med IT-værktøjet Geogebra.) Følg disse anvisninger på en pc:
Gå for eksempel til geogebra.org/classic , (Layout for GeoGebra kan have ændret sig),

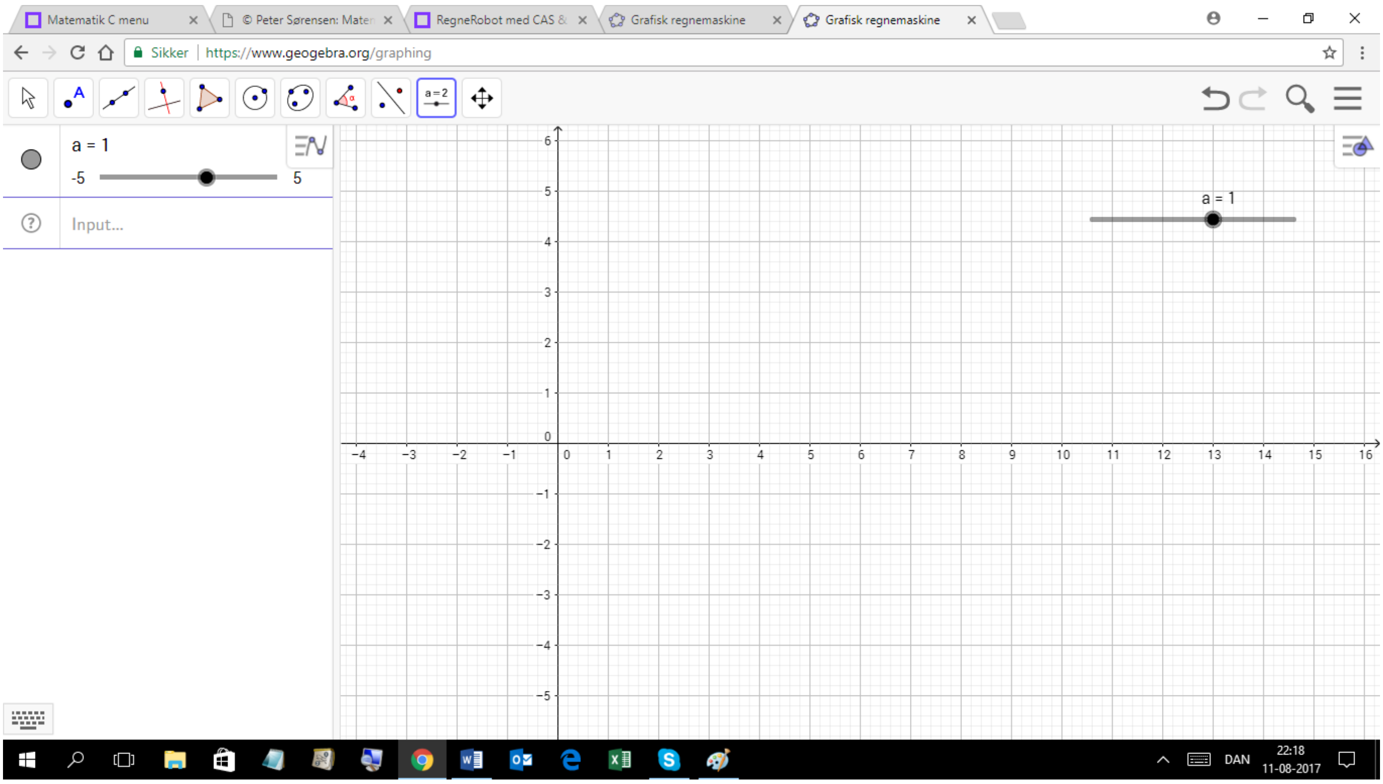
1) og du får nedenstående billede.
2) Klik med musen i ikonet . Det er markeret med en rød pil nedenfor.



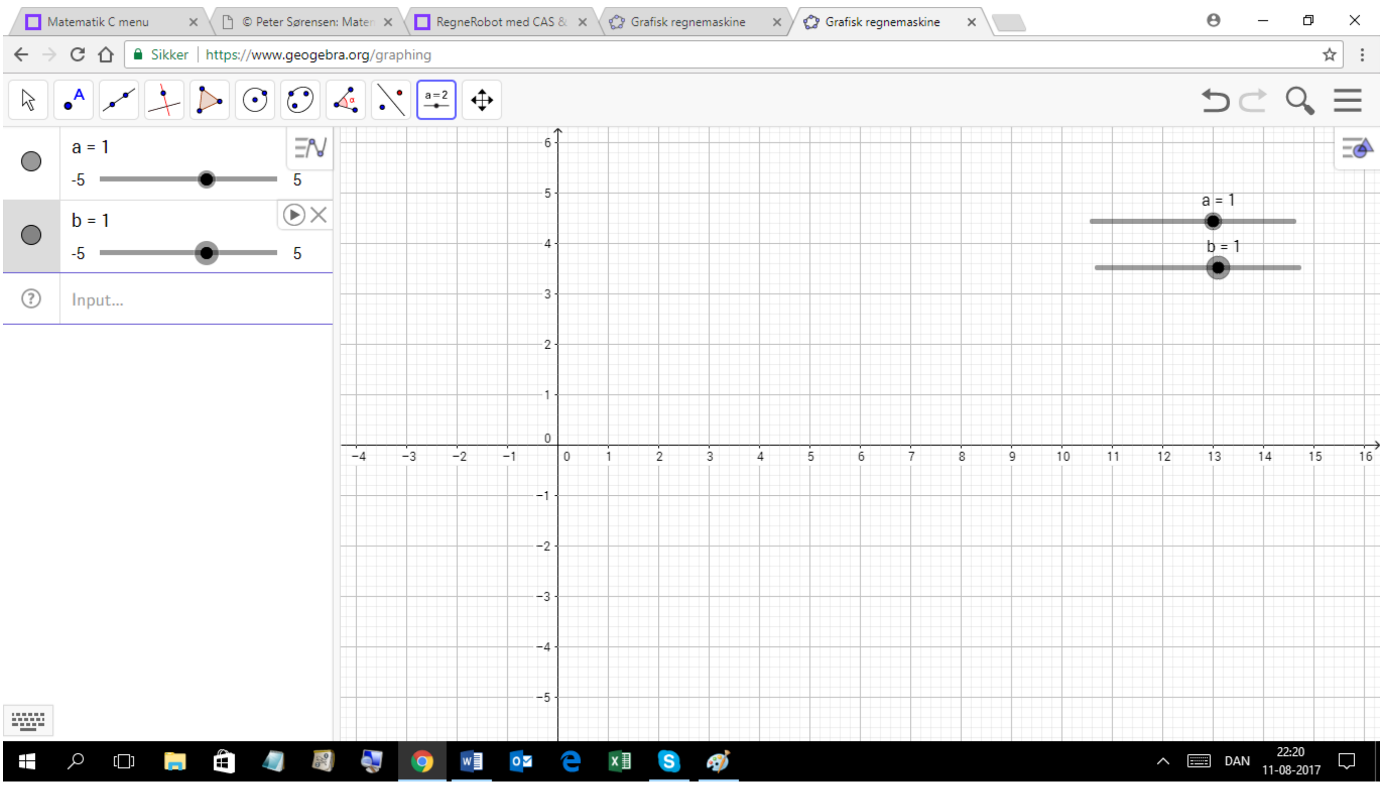
3) Klik med musen et tilfældigt sted i tegnefladen, dvs i koordinatsystemet og du får dette billede:



4) Du klikker blot OK og så ser det sådan ud:

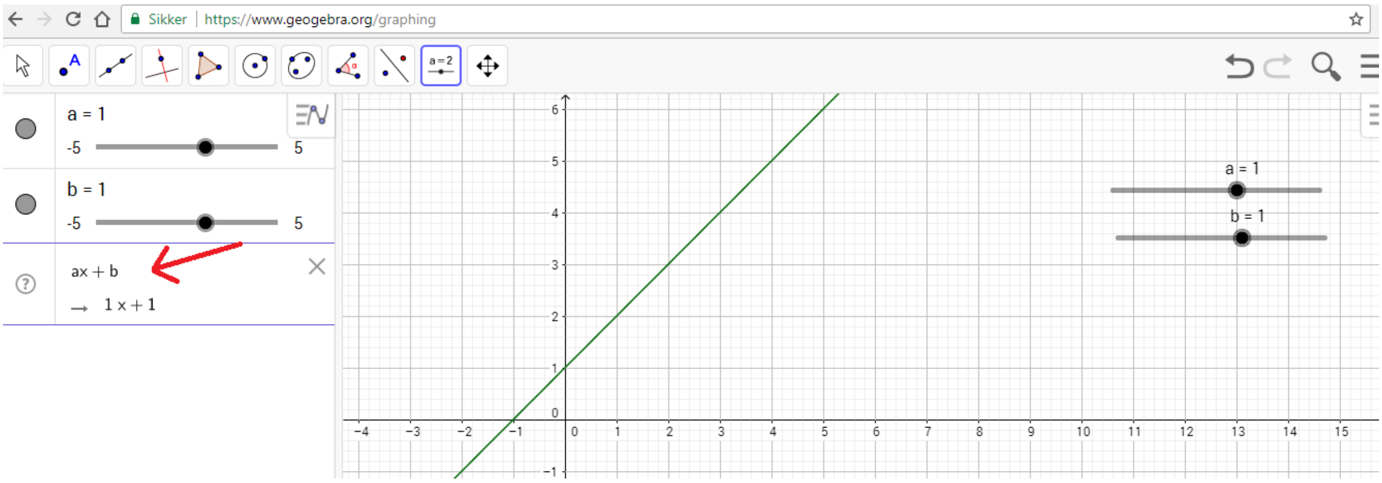


5) Du gentager punkt 2), 3) og 4), hvorefter det ser sådan ud:



Du kan nu arbejde med to tal *a* og *b*, der begge har værdien 1; men det kan du ændre på ved at trække i de to såkaldte skydere, der her over ses øverst til højre.
Du skal nu få Geogebra til at tegne grafen for *y=ax+b*.

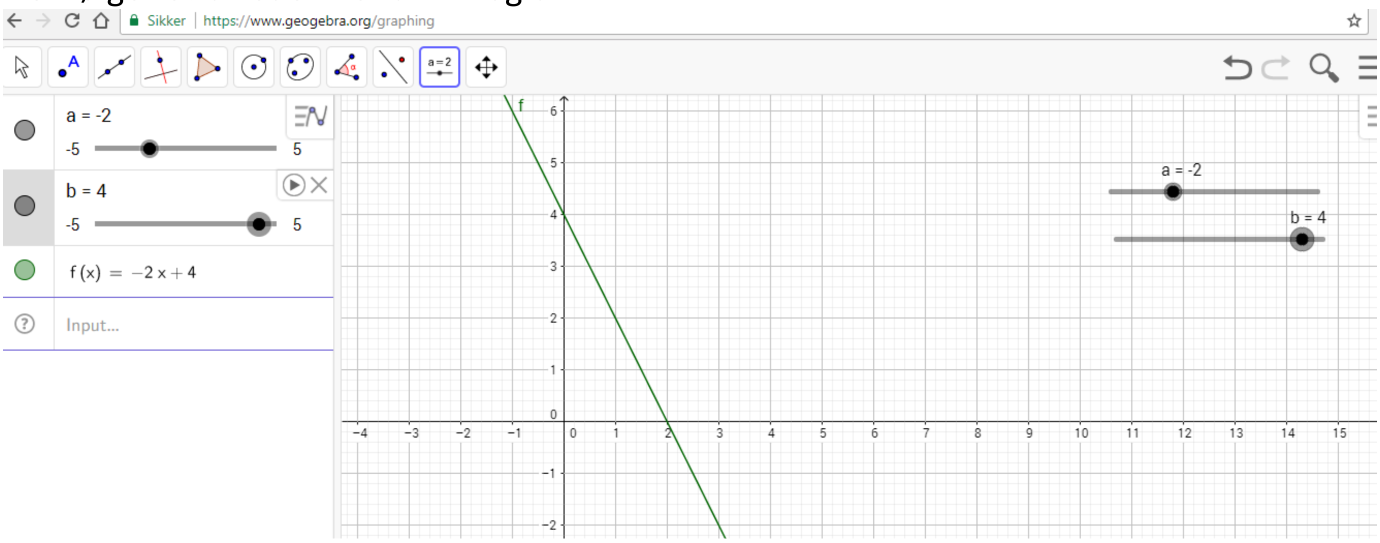
6) Du udfylder "Input"-feltet i spalten til venstre med *ax+b*. Se efterfølgende billede ved den røde pil. Grafen er tegnet.



7) Nu skal du ændre på *a*-værdien. Du trækker frem og tilbage med musen i den øverste skyders sorte plet. Venstre musetast skal være nede mens du trækker. Du vil se hvordan grafen ændrer sig dynamisk i takt med, at *a* ændrer værdi.

8) Nu skal du ændre på *b*-værdien. Du trækker frem og tilbage med musen i den nederste skyders sorte plet. Du vil se hvordan grafen flytter sig op og ned dynamisk i takt med, at *b* ændrer værdi. Grafen vil hele tiden skære *y*-aksen i *b*.

Her følger et billede hvor $a = -2$ og $b = 4$



Formler for a og b

Hvis man til to *x-værdier* kender de tilsvarende *y-værdier* for en funktion, kan man finde regneforskriften. Metoden er først at finde ***a*** og derefter ***b***.
Lad y_1 betyde funktionsværdien af x_1 og y_2 funktionsværdien af x_2.

Der gælder følgende formler:

$\boldsymbol{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$	$b = y_1 - a \cdot x_1$	$hvor\ y_1 = f(x_1)\ og\ y_2 = f(x_2)$

Når man har beregnet ***a*** og ***b*** kan regneforskriften umiddelbart opskrives. Lad os se et eksempel.

Vi vil finde regneforskriften for en funktion, som er defineret på det lukkede interval fra 3 til 7, og som er bestemt ved disse x- og y-værdier:

x	3	7
y	1	9

Vi bruger formlerne og får

$$a = \frac{9-1}{7-3} = \frac{8}{4} = 2$$
$$b = 1 - 2 \cdot 3 = 1 - 6 = -5$$

Dvs. regneforskriften bliver *y = 2x - 5*

Hvis vi kalder funktionen *g*, kan vi skrive: *g(x) = 2x – 5 ,   Dm(g) =* [3; 7]

Det er god orden at anføre definitionsmængden, når regneforskriften opskrives.

Lineær model

I perioden 1900 -1965 kan Sjællands befolkning med god tilnærmelse beskrives ved den lineære funktion ***y=15565x+831858***, hvor ***y*** er befolkningstallet og ***x*** er antal år efter 1900. Denne lineære funktion kaldes også en **lineær model** for Sjællands befolkning.

At kommentere modellen

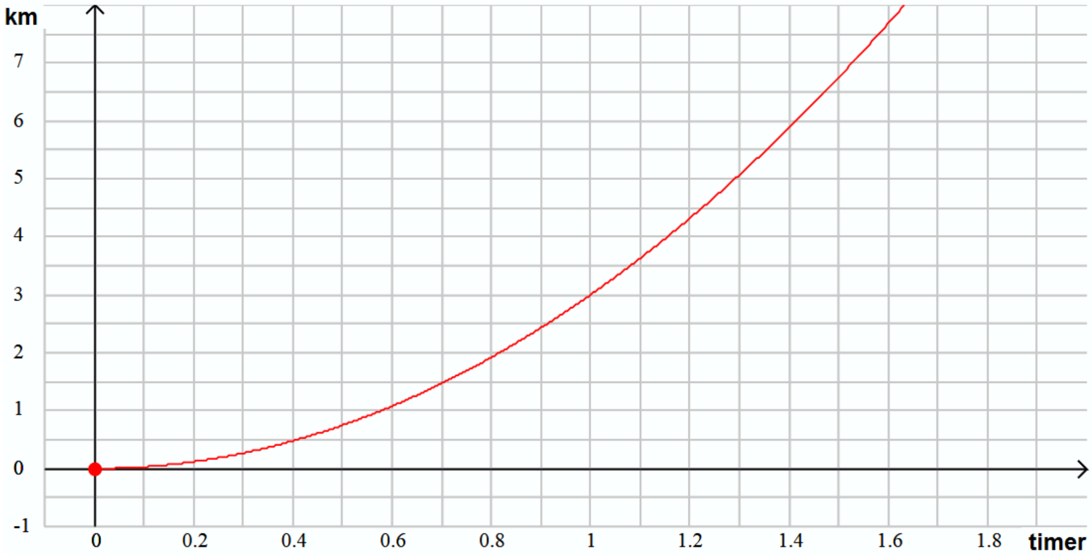
er, at oplyse, hvor nøjagtig, modellen er.
Det kan man gøre ved at beregne modellens %-vise afvigelse fra de faktiske tal.
Du kan i RegneRobot få hjælp til at kommentere en model ved at klikke i "Guide & CAS" og vælge "Kommentér modellen".

3) Løs Interaktivt: Opgaver i **lineær funktion**

4) Løs E-opgaver: **E-opg. 11 Lineær funktion**

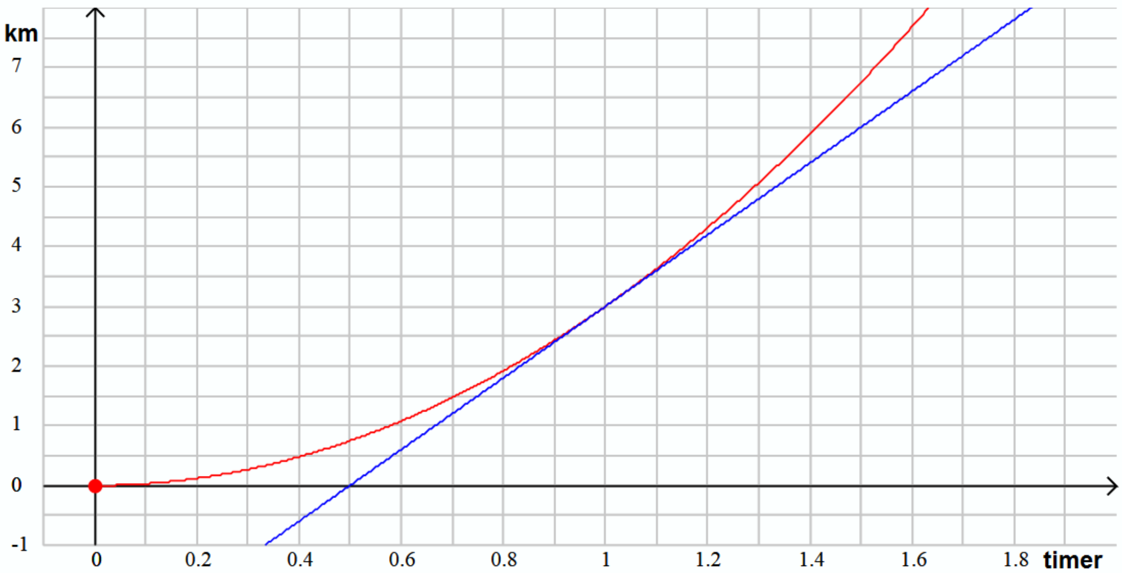
Lektion 11b: Tangent og væksthastighed

En flodpram begynder at sejle. Den sejler meget langsomt i begyndelsen og efterhånden får den mere fart på. Nedenstående graf viser hvor mange km prammen er sejlet efter x timer.



Det ses at, flodprammen har sejlet 3 km efter 1 time.
Efter 1,1 time har den sejlet ca 3,62 km.
Hastigheden efter 1 time er ca. $\frac{3{,}63-3}{1{,}1-1}$ $km/time$ $= 0{,}63\ km/time$
Her fik vi beregnet hastigheden ved at se på, hvor langt der blev sejlet på 0,1 time.
Hvis vi havde betragtet et meget mindre tidsinterval, så ville vi have fundet at hastigheden efter 3 timer var 0,60 som er et mere nøjagtigt resultat for hastigheden efter netop 3 timer, svarende til ***x = 3***.

Linjen herunder rører grafen i punktet (3, 1) og har hældningen 0,6. En sådan linje kaldes en tangent, og tangentens hældningskoefficient fortæller hastigheden for ***x = 3***.
Ofte benyttes ordet **væksthastighed**.



Lektion 12: Tegn grafer med pc

Sådan tegnes grafer med pc

Her vil blive gennemgået 5 måder til tegning af grafer med pc.
Du behøver ikke at læse om dem alle.

- Ved hjælp af RegneRobot.dk
- Ved hjælp af geogebra.org/classic , som demonstreret i Lektion 11a.
- Ved hjælp af WordMat
- Ved hjælp af regneark Excel

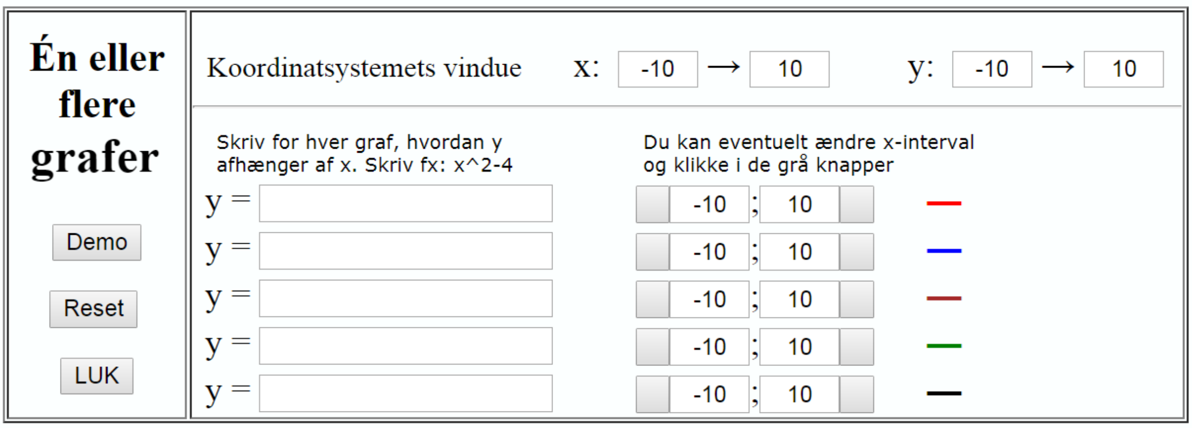
Du behøver ikke at fordybe dig i alle 4 metoder. Du skal blot kunne tegne grafer på den ene eller anden måde.

Fordele og ulemper ved de 3 metoder:

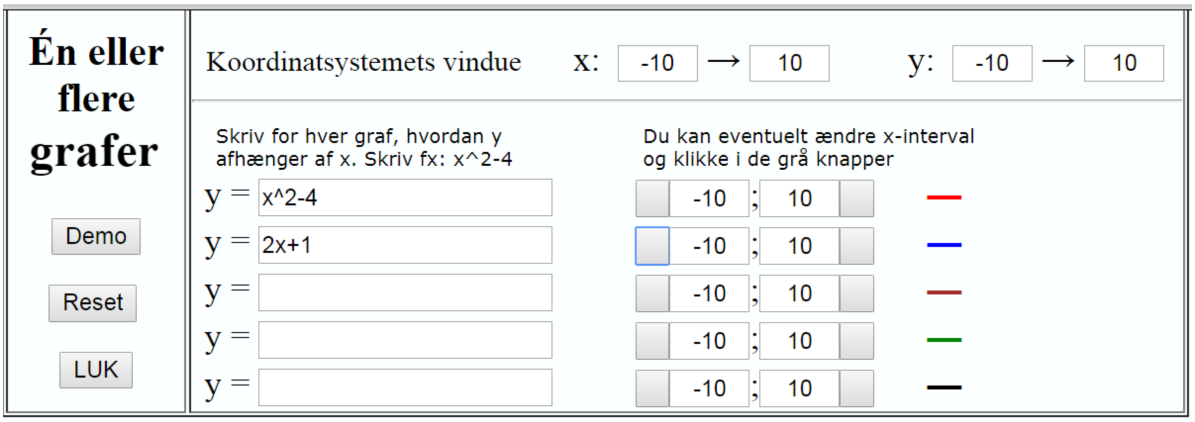
	Fordele
RegneRobot.dk	Er Gratis Let at betjene Egnet ved åbne og lukkede intervaller På dansk Kan anvendes online uden installation Kan også downloades via RegneRobot.dk
geogebra.org/classic	Er Gratis Mange faciliteter På dansk Kan anvendes online uden installation Kan også downloades via geogebra.org/download
WordMat	Mange faciliteter Let at betjene På dansk Kan downloades gratis
Regneark Excel	Praktisk, hvis man i forvejen arbejder i Excel.

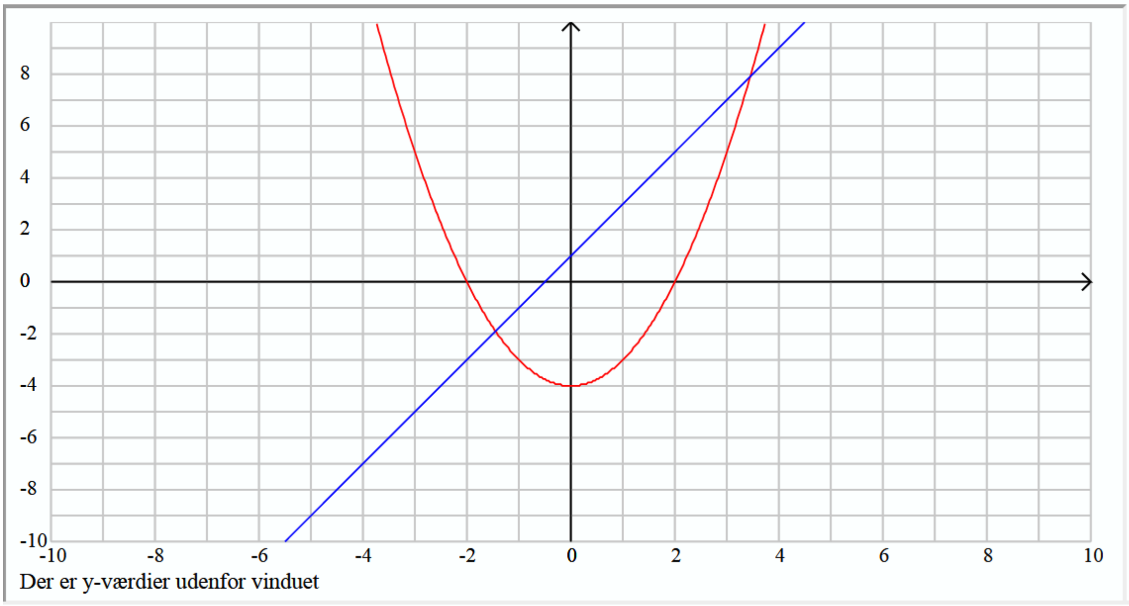
Grafer med RegneRobot.dk

Vælg Graf i Guide & CAS, og dette vindue popper op forneden:



Du kan herefter skrive en eller flere regneforskrifter, som det ses herunder, og når du klikker med markøren uden for et skrivefelt, vil den ønskede graf tone frem.
De små felter er på forhånd udfyldt med standardværdier, som du eventuelt kan ændre.
Hvis en graf ikke toner frem, kan det skyldes, at koordinatsystemets vindue er for lille.



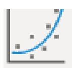


+

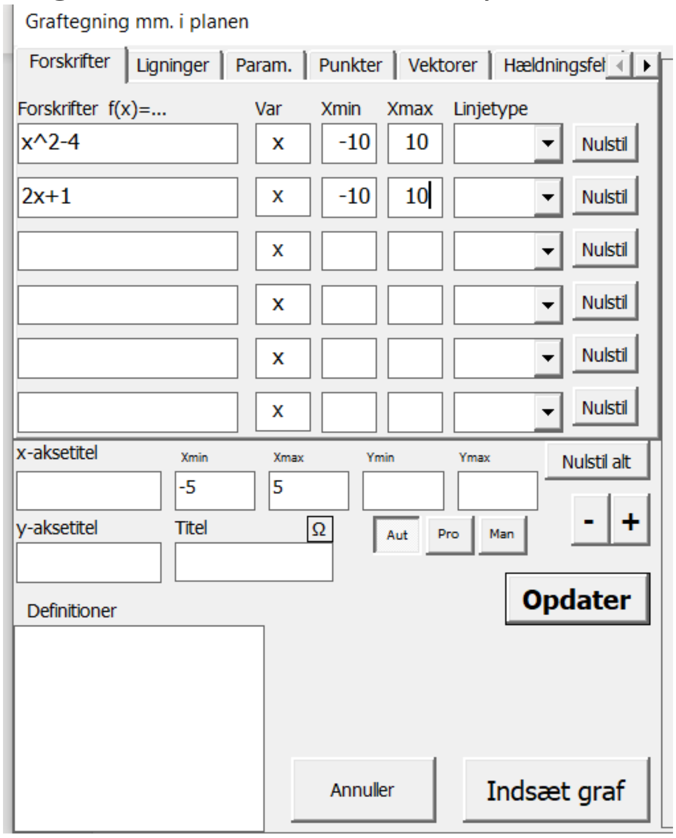
Grafer med geogebra.org/classic

Dette er demonstreret i Lektion 11a. Hvis man blot skal tegne en graf behøves ingen skydere.
Hvis din graf ikke kommer frem, kan det skyldes, at grafen ligger uden for vinduet.
Du kan flytte vinduet ved at trække i vinduet med musen.
geogebra.org/classic er en del af et større kompleks af faciliteter i Geogebra. Der kan tegnes trekanter m.m. Du kan læse mere om Geogebra via dette link:
http://www.harremoes.dk/BrockA/OpenSource/GeoGebra/Geogebra-manual%20ver%200.1.pdf

Grafer med WordMat

Du skal have installeret WordMat som tilføjelse til Word.
Link til download af WordMat: http://www.eduap.com/wordmat/
I menu-linjen foroven klikker du i ”WordMat” og derefter i ikonet 

Der popper op en dialogboks, som du fx kan udfylde således:



Derefter klikker du i ”Indsæt graf”.

Grafer med regneark Excel

Vi vil tegne grafen for $y = x^2 - 3$ og starter med at lave en tabel med støttepunkter i regnearket.

Du udfylder nogle celler i regneark fx således:

	A	B	C
1	x	-3	=B1+1
2	y		

Når du taster ***Enter*** kommer der til at stå ***-2*** i celle ***C1.***

Du markerer cellerne ***C1*** til ***H1***:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2					
2	y							

Tast ***Ctrl+r*** og du får gentaget metoden fra ***C2*** mod højre i det markerede område sådan:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	y							

I celle ***B3*** skriver du: ***=B1^2-3*** og derved bliver funktionsværdien af ***-3*** beregnet.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	y	6						

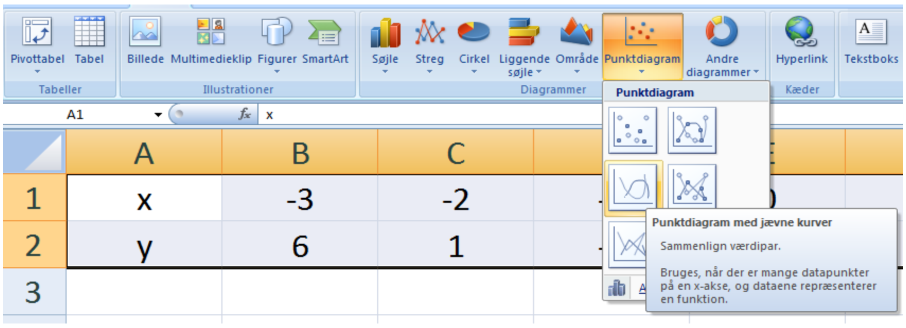
Du markerer cellerne ***B2*** til ***H2*** og taster ***Ctrl+r*** og får:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	y	6	1	-2	-3	-2	1	6

Nu har du fået en tabel med støttepunkter og er klar til at tegne grafen.

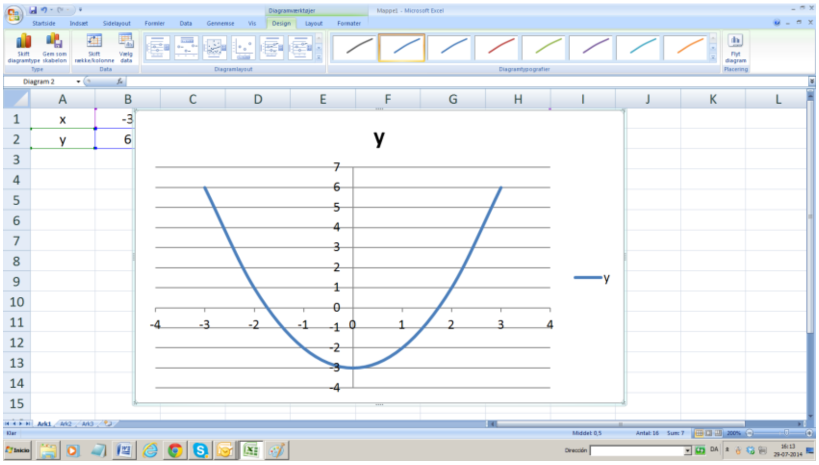
Du markerer C1 til H2, og i fanebladet **Indsæt** vælger du 

og  sådan:



Og vupti, så popper grafen frem:

Vinduet med grafen kan flyttes med musen og det kan kopieres.



Lektion 13: Logaritmer

Udfør følgende 3 punkter

1) Se video   Link: Logaritme

2) Læs:

10-talslogaritmen

Ligningen **4^x = 35** kan være vanskelig at løse fordi x er eksponent; men her er hjælp at hente hos logaritmefunktionen, som vi skal lære om nu.

10-talslogaritmen til et ***positivt tal*** er den eksponent, man skal sætte på 10 for at få tallet.

Fx: 10-talslogaritmen til 100 er 2 **,** fordi $10^2 = 100$.

Ofte siger man blot **logaritme** i stedet for 10-talslogaritme.

Logaritmen til et tal ***x*** skrives ***Log(x)*** eller blot ***Log x***; men ved CAS m.m. skal skrives parenteser.
Bemærk: ***x*** skal være ***positivt***.

(I avanceret matematik arbejdes også med en såkaldt **naturlig logaritme**, der i stedet for 10 bygger på et særligt tal, kaldet ***e***, hvor ***e*** = ca.2,7. Den naturlige logaritme til e^2 er *2.* Vi skriver $\ln(e^2) = 2$)

Logaritmeregler:

log(a · b) = log(a) + log(b) *og* ***$\log(a^x) = x \log(a)$***

Det er den sidste af disse to regler, der udnyttes til løsning af visse ligninger.

Eks. 1

Løs ligningen: $4^x = 35$

Løsning:

$$4^x = 35$$

$$\text{Log}(4^x) = \text{Log}(35)$$

$$x \cdot \text{Log}(4) = \text{Log}(35)$$

$$x = \frac{Log(35)}{Log(4)}$$

$$x = 2{,}56464\ldots$$

$$\underline{\boldsymbol{x = 2{,}5646}}$$

Eks. 2
Løs ligningen: $3 \cdot 7^x = 90$

Løsning

$3 \cdot 7^x = 90$

$7^x = 30 \Leftrightarrow$

$x \cdot Log(7) = Log(30)$

$x = \frac{Log(30)}{Log(7)}$

$x = 1,74786...$

$\underline{\mathbf{x = 1,7479}}$

Løs flere øvelsesopgaver. Link: Eksponentielle ligninger

I lektion 7 blev det lovet, at vi senere skulle se, hvordan man kan beregne ***n*** i renteformlen: $K = K_o \cdot (1+r)^n$, og det er nu, vi skal se det.

Eks. 3
500 forrentedes gennem nogen år med 3% pr år og voksede til 903kr.
Hvor mange år gik der.

Løsning

Vi ved $903 = 500 \cdot 1,03^n$

$^{903}/_{500} = 1,03^n$

$Log(\,^{903}/_{500}\,) = Log(1,03^n)$

$Log(\,^{903}/_{500}\,) = n \cdot Log(1,03)$

$$\frac{Log\left(^{903}/_{500}\right)}{Log(1,03)} = n$$

$n = 19,9...$

$n = 20$

Der gik 20 år

3) Løs E-opgaver: E-opgaver 13 logaritmer

Lektion 14: Eksponentielle funktioner

Udfør følgende 4 punkter

1) Læs:

Definition:

En funktion kaldes eksponentiel, hvis den har en regneforskrift, der kan skrives således:

$f(x) = b\,a^x$ eller $y = b\,a^x$, idet a og b er positive tal.

Eksempel 1:

Indiens befolkning var i 1900 ca. 138 millioner, og er siden vokset med ca. 2% om året..
Vi siger, at befolkningstallet hvert år fremskrives med 2%.
Den årlige fremskrivningsfaktor er 1,02

Efter 1 år er befolkningstallet:	138 mio ·1,02	=	140,8 mio
Efter 2 år er befolkningstallet:	138 mio ·$1{,}02^2$	=	143,6 mio
Efter 3 år er befolkningstallet:	138 mio ·$1{,}02^3$	=	146,4 mio
Efter 4 år er befolkningstallet:	138 mio ·$1{,}02^4$	=	149,4 mio
Efter x år er befolkningstallet:	**138 mio ·$1{,}02^x$**		

Befolkningstallet kan beskrives med funktionen $f(x) = 138 \cdot 1{,}02^x$
Hvor x er antal år efter 1900

Eksponentiel model

Vi lægger mærke til, at befolkningstallet i Indien vokser eksponentielt (næsten). Vi siger, at befolkningstallet kan beskrives med **den eksponentielle model:** $f(x) = 138 \cdot 1{,}02^x$

Dette minder meget om kapitalfremskrivning, hvor formlen er: $K = K_0 \cdot (1+r)^n$

Læg mærke til, at n er et helt tal ved kapitalfremskrivning, nemlig antallet af rentetilskrivninger (antal terminer).

I regneforskriften for Indiens befolkning behøver x ikke at være et helt tal.

I den eksponentielle model for Indiens befolkning er $a = 1{,}02$.
Hver gang, der går ét år, fremskrives Indiens befolkning med *2%.*
Man beregner en fremskrivning på *2%* ved at gange med *1,02* nemlig den årlige fremskrivningsfaktor.
Den **2-årige** fremskrivningsfaktor er $1{,}02 \cdot 1{,}02 = \mathbf{1{,}02^2}$.
Den **7-årige** fremskrivningsfaktor for Indiens befolkning er $\mathbf{1{,}02^7}$

b i regneforskriften kaldes **begyndelsesværdien**, fordi $f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$

a i regneforskriften kaldes **fremskrivningsfaktoren svarende til en tilvækst i x på 1**.
Ofte siges blot fremskrivningsfaktoren.

Hvis a er mellem *0* og *1*, er f aftagende.

a og ***b***'s betydning for grafen

Dette illustreres glimrende med IT-værktøjet Geogebra. Du følger punkterne 1) til 7) i lektion 11, dog skal du i input-feltet skrive ***b*a^x***. Du taster **^** ved først at taste **^** til højre for ***Å*** på tastaturet og derefter taster du mellemrum.

At kommentere modellen

er, at oplyse, hvor nøjagtig, den er.
Det kan man gøre ved at beregne modellens %-vise afvigelse fra de faktiske tal. Dette kan gøres automatisk i RegneRobot.dk. Klik i "Guide & CAS" og vælg: "Kommentér modellen".

Eksempel 2:
50g radioaktivt stof, der henfalder med *5%* om dagen kan beskrives med en eksponentiel funktion. Der er en daglig tilvækst på *-5%* uanset hvilken dag, der betragtes.
Det er en eksponentielt aftagende funktion og regneforskriften er. $y = 50 \cdot 0{,}95^x$, hvor x er antal dage siden begyndelsen, da der var *50g.*

Formlerne for ***a*** og ***b***

Hvis man kender 2 funktionsværdier, kan man beregne ***a*** ved formlen:

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

Herefter kan b findes ved hjælp af formlen:

$$\boxed{b = y_1 \cdot a^{-x_1}} \quad \text{eller} \quad \boxed{b = y_1 / a^{x_1}}$$

Eksempel 3:

x	-2	17
y	11	0,9

$$a = \sqrt[17-(-2)]{\frac{0{,}9}{11}} \quad = \quad \sqrt[19]{\frac{0{,}9}{11}} \quad = \quad 0{,}8766... \quad = \quad \underline{\mathbf{0{,}877}}$$

$b = 11 \cdot 0{,}8766...^{-(-2)} = 11 \cdot 0{,}8766...^{-(-2)} = 11 \cdot 0{,}8766...^{2} = 8{,}4519... = \underline{\mathbf{8{,}452}}$

Regneforskriften bliver således: $y = 8{,}452 \cdot 0{,}877^x$

Bevis for: $a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$

Vi er i den situation, at vi kender 2 funktionsværdier y_1 og y_2,
svarende til x-værdierne x_1 og x_2.

Det stiller vi op i et sildeben:

x	x_1	x_2
y	y_1	y_2

Ud fra regneforskriften fås:

$\mathbf{y_1 = b \cdot a^{x_1}}$ og

$\mathbf{y_2 = b \cdot a^{x_2}}$

Den nederste af de 2 ligninger divideres med $\mathbf{y_1}$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{y_1}$$

$\mathbf{y_1}$ i nævneren til højre erstattes med $\mathbf{b \cdot a^{x_1}}$, der har samme værdi.

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}}$$

Brøken til højre forkortes med b

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}$$

Ved hjælp af potensregler for division fås:

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2 - x_1}$$

Vi tager nu en passende rod på begge sider. Tallet x_2-x_1 bestemmer hvilken rod vi tager, og vi får:

$$\sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = a$$ hvilket skulle bevises.

Bevis for $b = y_1 \cdot a^{-x_1}$ eller $b = {}^{y_1}/{a^{x_1}}$

Vi bemærker, division med a^{x_1} er det samme som multiplikation med a^{-x_1}
De 2 formler er således faktisk ens og blot skrevet på lidt forskellig måde.

Ud fra regneforskriften fås:

$y_1 = b \cdot a^{x_1} \quad \Leftrightarrow \quad {}^{y_1}/{a^{x_1}} = b$ hvilket skulle bevises.

Eksempel 4:

Vi betragter 2 funktionsværdier y_1 og y_2, svarende til x-værdierne x_1 og x_2.

x	5	8
y	4	6

$a = \sqrt[8-5]{\frac{6}{4}} = \sqrt[3]{1{,}5} = 1{,}5^{(1/3)} = 1{,}1447... = 1{,}145$

$b = {}^{4}/{1{,}1447...^{5}} = 2{,}0350... = 2{,}035$

og regneforskriften *bliver* $f(x) = 2{,}035 \cdot 1{,}145^x$

Herefter kan vi fx beregne $f(10) = 2{,}035 \cdot 1{,}145^{10} = \mathbf{7{,}89}$

Fordoblings- og halveringskonstant

Ved eksponentielt voksende funktioner tales også om en fordoblingskonstant (fordoblingstid) T_2. Det er den forøgelse i x, der giver anledning til en fordobling af funktionsværdien y.

Tilsvarende tales om en halveringskonstant (halveringstid) $T_{½}$ ved eksponentielt aftagende funktioner.

Fordoblings og halveringskonstanterne kan ofte aflæses direkte af grafen ved at finde den x-tilvækst, der giver anledning til en fordobling/halvering.

Der gælder følgende formler:

$$T_2 = \frac{Log(2)}{Log(a)} \qquad \text{og} \qquad T_{½} = \frac{Log(0{,}5)}{Log(a)}$$

I eksempel 3 beregnede vi ***a*** til *0,8766…*

Ved hjælp af formlen $T_{½} = \frac{Log(0{,}5)}{Log(a)}$ kan vi nu beregne halveringskonstanten for den pågældende eksponentielle funktion.

T½ = Log (0,5) / Log(0,8766…) = 5,2610… = **5,261**

> Hvis du kender fremskrivningsfaktoren ***a***, kan du beregne **T₂** eller **T½**
>
> Hvis du ikke kender ***a***, men kender ***2 støttepunkter***, kan du beregne ***a*** og så **T₂** eller **T½.**
>
> Hvis du **kun** har en **graf**, så finder du **T₂** eller **T½** ved først at finde 2 punkter, der svarer til en fordobling eller halvering i funktionsværdi, og så trække x-værdierne fra hinanden.

Bevis for formlen $T_2 = \frac{Log(2)}{Log(a)}$ forløber således.

Lad *x* betegne fordoblingskonstanten for en eksponentiel funktion
Der må så gælde:

$2b = ba^x$

$2 = a^x$

$Log\ 2 = Log\ a^x$

$Log\ 2 = x \cdot Log\ a$

$$\frac{Log(2)}{Log(a)} = x$$

Dvs. fordoblingskonstanten er: $\frac{Log(2)}{Log(a)}$

Formlen for halveringskonstanten bevises på tilsvarende måde.

2) Se video: [Eksponentiel funktion]

3) Løs interaktive opgaver: [eksponentiel funktion]

4) Løs E-opgaver: [E-opg_14b_lin_og_exp.htm]

Fortsættelse i del 2